

XXVIII математическая регата

6 классы

Решения задач

1.1. Влад записал на доске 4 натуральных числа и перемножил их. Иван увеличил каждое число, записанное Владом, на один, перемножил полученные числа и получил произведение, в три раза большее, чем у Влада. Приведите пример чисел, которые мог записать Влад.

Ответ: 2; 3; 4; 5.

Решение: действительно, $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$, а $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$.

Пример, возможно, не единственный!

Критерии:

1.2. У Ксюши есть волшебный зонтик (см. рисунок), который она хочет раскрасить в 4 цвета. Покажите, как ей покрасить свой зонтик так, чтобы любые три сектора подряд были раскрашены в три разных цвета и всего синих секторов было 2, зелёных 3, красных 4, белых 3.

Решение: покрасить можно, например, так: зелёный, белый, красный, синий, зелёный, красный, белый, синий, красный, зелёный, белый, красный.

Решение: разрезать можно, например, так.

Критерии:



1.3. Разменный терминал меняет американские доллары на канадские. За 4 американских доллара терминал выдаёт 6 канадских, за 5 американских долларов – 7 канадских, за 6 американских долларов – 8 канадских. Других операций терминал не производит. Ирина Владимировна потратила 180 американских долларов на то, чтобы получить 248 канадских. Сколько операций совершила Ирина Владимировна.

Ответ: 34 операции.

Решение: За каждую операцию Ирина Владимировна получает на 2 канадских доллара больше, чем потратила американских. Так как всего она получила на 68 канадских долларов больше, чем потратила американских, то совершила она $68 : 2 = 34$ операций. Пример как должен происходить обмен: 10 раз 6 американских долларов поменять на 8 канадских долларов (получим 80 канадских долларов из 60 американских долларов) и 24 раза поменять 5 американских долларов на 7 канадских долларов (получим 168 канадских долларов из 120 американских долларов). Проверим: отдали – $60 + 120 = 180$ американских долларов, получили – $80 + 168 = 248$ канадских долларов.

Критерии:

2.1. Светлана Ивановна принесла из столовой коробку сока и отлила себе половину содержимого коробки. Затем подошёл Владимир Леонидович и отлил себе $\frac{1}{3}$ оставшегося сока. Далее пришёл Яков Александрович и выпил $\frac{1}{4}$ от того, что осталось. Пришедший после Данила Владимирович выпил $\frac{1}{5}$ остатка, а затем Ирина Владимировна - $\frac{1}{6}$ остатка. Подошедшему последним Дмитрию Игоревичу досталось оставшиеся 300 мл сока. Сколько миллилитров сока было в коробке первоначально?

Ответ: 1800 мл.

Решение: Раз Ирина Владимировна выпила $\frac{1}{6}$ последнего остатка, то Дмитрию Игоревичу осталось количество, равное $\frac{5}{6}$ этого остатка, что равно 300 мл. Значит, перед тем, как сок пила Ирина Владимировна, в коробке было $300 : \frac{5}{6} = 360$ мл сока. Аналогично, перед тем, как сок пил Данила Владимирович, в коробке было $360 : \frac{4}{5} = 450$ мл. Перед тем, как сок пил Яков Александрович, в коробке было $450 : \frac{3}{4} = 600$ мл. Перед тем, как Владимир Леонидович отлил себе сок, в коробке было $600 : \frac{2}{3} = 900$ мл. А в самом начале в коробке было $900 : \frac{1}{2} = 1800$ мл.

2.2. Вася распилил прямую палку на части, длины которых равны 2, 4, 6, 7, 8, 9 и 10 см. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?

Ответ: можно.

Решение: например, можно составить прямоугольник $6 \text{ см} \times 17 \text{ см}$ или $9 \text{ см} \times 10 \text{ см}$. В первом случае стороны должны быть составлены из 6, $4 + 2$, $8 + 9$ и $10 + 7$ см, а во втором – из 10, $4 + 6$, $7 + 2$ и 9 см.

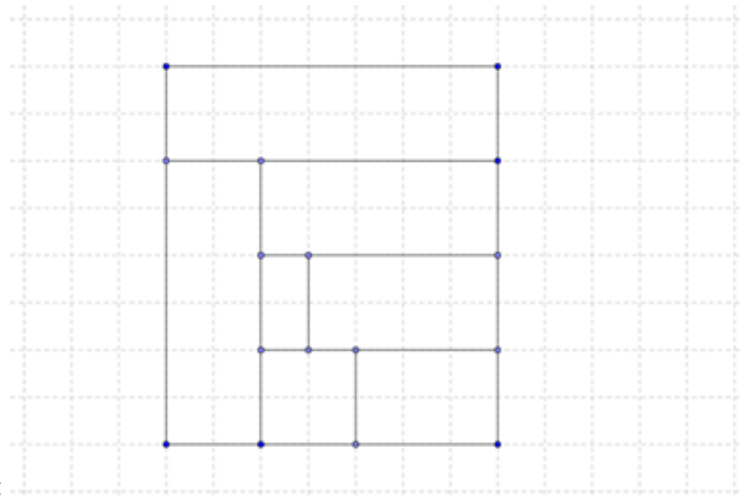
Критерии:

2.3. Катя нарисовала на доске таблицу 4×4 и покрасила клетки этой таблицы в 3 цвета так, что каждая клетка имеет общие стороны с клетками двух других цветов. Докажите, что клеток каждого цвета не меньше четырёх.

Решение 1: посмотрим на угловую клетку. Пусть она синяя. Около неё всего две соседние клетки. Значит, эти клетки двух других оставшихся цветов. Получается, что в уголке из трёх клеток есть все три цвета. Поскольку уголков 4, то и каждого цвета как минимум 4.

Решение 2: предположим, что клеток какого-то цвета меньше 4. Тогда у этих клеток не более 12 соседних клеток. Тогда клеток других цветов не более 12. Значит, всего клеток не более $3 + 12 = 15$. Противоречие. Значит наше предположение не верно, и клеток каждого цвета не менее 4.

3.1. Покажите, как прямоугольник 7×8 разрезать на различные клетчатые прямоугольники со стороной 2 (клетчатый прямоугольник состоит из целых клеток)?



Решение: например, так:

3.2. Можно ли в клетки таблицы 3×3 вписать числа от 1 до 9 (в каждую клетку - одно число, и каждое число - ровно один раз) так, чтобы произведения чисел, записанных в каждом квадрате 2×2 , были равны?

Ответ: нельзя.

Решение: В разложении на простые множители чисел от 1 до 9 числа 5 и 7 встречаются только один раз. Значит, они должны входить в каждое произведение и, соответственно, в каждый квадрат 2×2 . Все квадраты 2×2 имеют только одну общую клетку (центральную), а чисел два. Значит, расставить числа, согласно условию, невозможно.

3.3. На острове рыцарей и лжецов встретились шестеро аборигенов, каждый из которых либо рыцарь, то есть всегда говорит правду, либо лжец, то есть всегда лжёт. Каждый абориген высказал своё мнение о пяти других. Оказалось, что фраз «ты рыцарь» было больше, чем фраз «ты лжец» (каждая фраза произносилась хотя бы раз). Сколько среди них рыцарей? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: 1 или 5 рыцарей.

Решение: Всегда в этой компании произносится $6 \cdot 5 = 30$ фраз. Если все лжецы (все рыцари), то все говорят только одну фразу. Противоречие. Если ровно один рыцарь, то фраза «ты рыцарь» будет произнесена лжецами друг о друге всего $5 \cdot 4 = 20$ раз, что больше половины. Подходит под условие. Если ровно два рыцаря, то фраза «ты рыцарь» будет произнесена лжецами друг о друге $4 \cdot 3 = 12$ раз и рыцарями друг о друге $2 \cdot 1 = 2$ раза, всего $12 + 2 = 14$ раз, что меньше половины. Не подходит под условие. Если ровно три рыцаря, то фраза «ты рыцарь» будет произнесена лжецами друг о друге $3 \cdot 2 = 6$ раз и рыцарями друг о друге $3 \cdot 2 = 6$ раз, всего $6 + 6 = 12$ раз, что меньше половины. Не подходит под условие. Если ровно четыре рыцаря, то фраза «ты рыцарь» будет произнесена лжецами друг о друге $2 \cdot 1 = 2$ раза и рыцарями друг о друге $4 \cdot 3 = 12$ раз всего $12 + 2 = 14$ раз, что меньше половины. Не подходит под условие. Если ровно пять рыцарей, то фраза «ты рыцарей» будет произнесена рыцарями друг о друге всего $5 \cdot 4 = 20$ раз, что больше половины. Подходит под условие.

Критерии: