Первый тур

Каждая задача – 6 баллов

1.1. Про числа a и b известно что a=b+1. Может ли оказаться так, что $a^4 = b^4$?

Да, может: a=1/2; b=-1/2.

Этот пример единственный.

$$a^4 = b^4, \quad |a| = |b|$$

Случай a=b невозможен. Случай a=-b дает указанный пример.

1.2. *TXYZ* - прямоугольник. На стороне *TZ* дана точка *A*, на стороне *TX* точка *B* так, что *AT:TZ=1:6*, *TB:BX=4:1*. Найти отношение площади четырехугольника *ABYZ* к площади всего прямоугольника.

$TA = x \qquad TZ = 6x$

$BX = y \qquad TB = 4y$

$$S_{TXYZ} = TZ \cdot TX = 6x \cdot (TB + BX) = 6x \cdot (4y + y) = 30xy$$

$$S_{\Delta TBA} = \frac{1}{2} TA \cdot TB = \frac{1}{2} x \cdot 4y = 2xy$$

$$S_{\Delta YXB} = \frac{1}{2} XY \cdot BX = \frac{1}{2} TZ \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 6x \cdot y = \frac{6xy}{2} = 3xy$$

$$\frac{S_{ABYZ}}{S_{TXYZ}} = \frac{S_{TXYZ} - S_{\Delta TBA} - S_{\Delta YXB}}{30xy} = \frac{30xy - 2xy - 3xy}{30xy} = \frac{5}{6}$$

1.3. В некоторой стране 20 городов, причем каждый соединен с каждой дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

Изначально дорог 20*19:2 = 190.

Должно остаться не менее 19 дорог, иначе граф не будет связным.

Поэтому можно закрыть на ремонт не более 190-19 = 171 дороги.

Ответ: 171

Второй тур

Каждая задача – 7 баллов

2.1. Даны действительные числа *a*, *b*, *c*, причем *a*>*b*>*c*. Докажите неравенство: $a^2b+b^2c+c^2a>b^2a+a^2c+c^2b$.

$$a^2b+b^2c+c^2a-b^2a-a^2c-c^2b=$$

$$=ab(a-b)-c\left(a^2-b^2\right)+c^2(a-b)=$$

$$=(a-b)\left(ab-ac-bc+c^2\right)=$$

$$=(a-b)(b-c)(a-c)>0$$

2.2. **.** Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Докажите, что хотя бы один из этих углов меньше 20^o.

Десять прямых, проведённых через одну точку, разбивают плоскость на 20 углов. Если все они не меньше 20^o, то их сумма не меньше

$$20 \cdot 20^{\circ} = 400^{\circ} > 360^{\circ},$$

что невозможно.

2.3. На доске написано число 123. Каждую минуту его увеличивают на 102. Разрешается в любой момент времени произвольно переставлять цифры у написанного числа. Можно ли добиться того, чтобы на доске всегда было написано трехзначное число?

$$123 \to 225 \to 327 \to 429 \to 531 \to 135 \to 237 \to 327$$

Третий тур

Каждая задача – 8 баллов

3.1. Натуральное двузначное число не делится на 3. Докажите, что сумма квадратов его цифр тоже не делится на 3.

***x* и *y* – цифры данного числа**

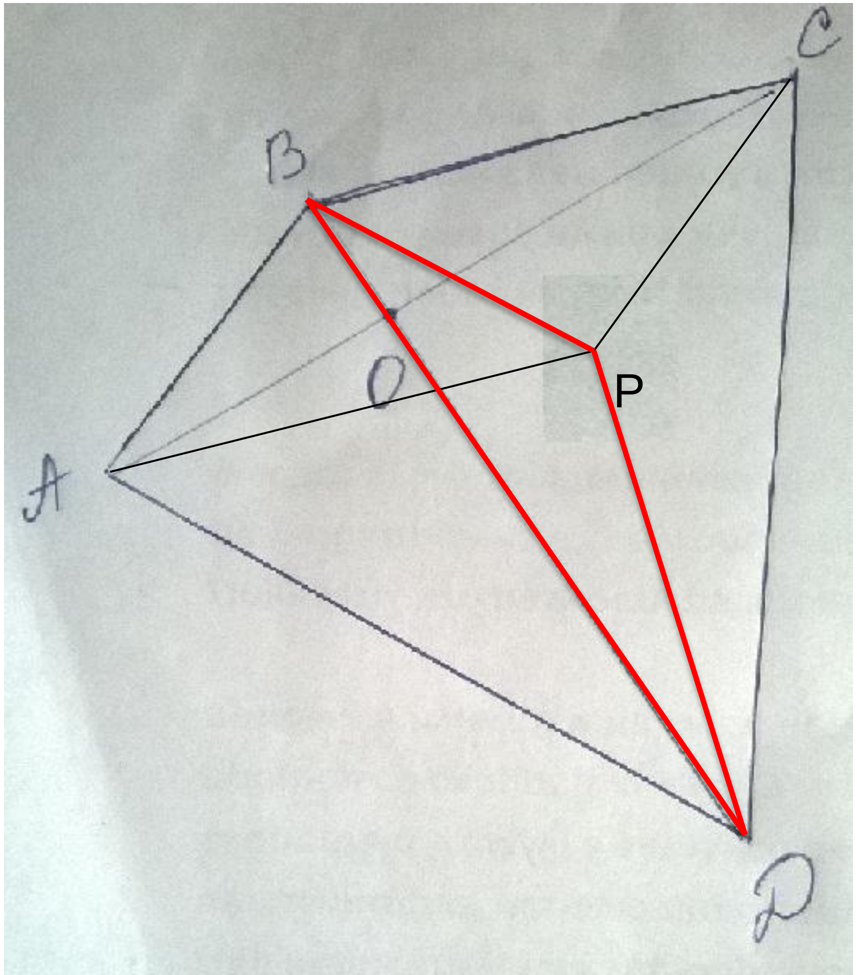
$$\begin{matrix} x=3k+1 \\ y=3n+1 \end{matrix} \longrightarrow x^2+y^2=9n^2+6n+9k^2+6k+2$$

$$\begin{matrix} x=3k+2 \\ y=3n+2 \end{matrix} \longrightarrow x^2+y^2=9n^2+12n+9k^2+12k+8$$

$$\begin{matrix} x=3k\pm1 \\ y=3n \end{matrix} \longrightarrow x^2+y^2=9n^2\pm6n+9k^2+2$$

$x=3k+1$ $y=3n+2$	$x=3k+2$ $y=3n+1$	$x=3k$ $y=3n$

3.2. Найти внутри выпуклого четырехугольника такую точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.



Сумма расстояний от O до вершин равна сумме длин диагоналей AC и BD.

PA + PC > AC
(неравенство треугольника)

PB + PD > BD
(неравенство треугольника)

Значит, сумма расстояний от P до вершин не меньше AC + BD, и равна AC + BD, только если P совпадает с точкой O. Значит, точка O — искомая.

3.3. Если в классе добавится столько мальчиков, сколько в нем сейчас девочек, то процент девочек уменьшится в 1,4 раза. Найдите, какой процент учеников класса составляли мальчики.

Мальчиков – *x*

Девочек - *y*

Процент девочек в классе - $\frac{100y}{x+y}$

Мальчиков – *x+y*

Девочек - *y*

Процент девочек в классе - $\frac{100y}{x+2y}$

$$\frac{100y}{x+y} = 1{,}4\frac{100y}{x+2y}$$

$$3y = 2x$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

$x + y = x + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{3}$ **- 100%**

x **- 60%**

Четвертый тур

Каждая задача – 9 баллов

4.1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2 - yz = 3, \\ y^2 - xz = 4, \\ z^2 - xy = 5. \end{cases}$

$$(y-x)(x+y+z)=1$$
$$(z-y)(x+y+z)=1$$
$$z-y=y-x$$
$$2y=x+z$$
$$(x-z)^2=16$$

$x-z=4$ или $x-z=-4$

$$x = z + 4$$
$$2y=2z+4$$
$$y=z+2$$

$$x^2-yz=3$$
$$(z+4)^2-(z+2)z=3$$
$$z=-\frac{13}{6}$$

$$\left(\frac{11}{6},-\frac{1}{6},-\frac{13}{6}\right)$$
$$\left(-\frac{11}{6},\frac{1}{6},\frac{13}{6}\right)$$

4.2В шести коробках лежат шарики, в первой - 1, во второй – 2, в третей – 3, в четвертой – 4, в пятой – 5, в шестой – 6. За один ход разрешается в любые две коробки прибавить по одному шарику. Можно ли за несколько ходов уравнять количество шариков во всех коробках?.

Первоначально шариков в коробках 1+2+3+4+5+6=21

после *к* ходов их станет *21+2к*.

общее число шариков в коробках в тот момент, когда во всех коробках шариков станет поровну, равно 6*n*, где *n* – число шариков в одной коробке

21+2к=6n

это равенство невозможно при натуральных *n* и *к*, так как его правая часть четна, а левая нечетна

4.3. Можно ли расставить 100 целых чисел по кругу так, чтобы для любого числа *n* от 1 до 100 среди расставленных чисел нашлись бы три последовательно стоящих числа, сумма которых равна *n*?

Предположим, такая расстановка возможна.

Всего различных троек подряд идущих чисел 100.

Просуммируем все числа, стоящие на окружности, тройками подряд идущих чисел, получим:

$$1+2+3+\ldots+99+100=\left(1+100\right)\cdot 50=5050$$

Но при этом каждое число мы учитывали трижды, следовательно 5050 должно делиться на 3, а это не так.