

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 1. 20.04.2015

1. Захар утверждает, что он может представить число 2015 в виде суммы пяти различных натуральных чисел, у которых каждая цифра будет нечетная. Прав ли Захар?

Решение. Ответ: Да, прав.

Существует множество примеров. Один из них: $1999+1+3+5+7=2015$.

2. Можно ли 11 гирь массаами 1, 2, 3, ..., 10, 11 грамм разложить на 3 кучки разного веса так, чтобы чем больше была кучка, тем меньше было в ней гирь?

Решение. Ответ: Нет, нельзя.

Для начала покажем, что в самой тяжелой кучке не больше двух гирек. Если это не так, то в ней по крайней мере 3 гири, в средней куче – 4, а в самой легкой по весу – 5. Т.о., нам понадобится как минимум 12 гирек. Получаем противоречие.

Значит, в самой тяжелой кучке будет не больше 2-х гирек.

Если в этой кучке будут самые тяжелые гири 11 и 10 грамм, что в сумме дает 21 грамм. В оставшихся двух кучках будет в сумме $1+2+\dots+9=45$ грамм. Тогда в какой-то из двух кучек будет не меньше 23-х грамм. Получается, что условие распределения веса не соблюдается.

Если в самой большой кучке будет меньше гирек или они будут легче, то общий вес кучки будет еще меньше, а в других кучках будет еще больше.

3. Света и Наташа решили сыграть в такую игру: Света ставит игральный кубик на одну из граней (в игральном кубике сумма чисел на противоположных гранях одинакова). Затем Наташа кубик на соседнюю грань и записывает число на верхней грани. После чего девочки повторяют свои операции. Наташа хочет, чтобы в какой-то момент сумма чисел, записанных в тетради, стала равной 100. Сможет ли Наташа получить 100 при любой игре Светы?

Решение. Ответ: Нет, не сможет.

Каждый раз Наташа записывает число от 1 до 6, значит, когда-нибудь ее сумма станет равной одному из чисел: 94, 95, 96, 97, 98 или 99. Света может ставить новый кубик гранью с числом, которого не хватает Наташе до 100. Т.о., как бы не перекачивала Наташа кубик, она не сможет в этот ход получить 100. Так Света может действовать каждый ход, а т.к. сумма растет, то она станет большей 100, и Наташа не сможет получить 100.

4. Света и Наташа решили сыграть в такую игру: Света ставит игральный кубик на одну из граней (в игральном кубике сумма чисел на противоположных гранях одинакова). Затем Наташа кубик на соседнюю грань и записывает число на верхней грани. После чего девочки повторяют свои операции. Наташа хочет, чтобы в какой-то момент сумма чисел, записанных в тетради, стала равной 100. Сможет ли Наташа получить 100 при любой игре Светы?

Решение. Ответ: Нет, не сможет.

Каждый раз Наташа записывает число от 1 до 6, значит, когда-нибудь ее сумма станет равной одному из чисел: 94, 95, 96, 97, 98 или 99. Света может ставить новый кубик гранью с числом, которого не хватает Наташе до 100. Т.о., как бы не перекачивала Наташа кубик, она не сможет в этот ход получить 100. Так Света может действовать каждый ход, а т.к. сумма растет, то она станет большей 100, и Наташа не сможет получить 100.

5. Среди первых 19 натуральных чисел выбрано 10 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 19, ни 20. Чему равна сумма выбранных чисел?

Решение. Ответ: $10+11+12+\dots+19=145$.

Разобьем все числа на 9 пар и еще одно число:

1-18, 2-17, 3-16, ..., 9-10 и 19.

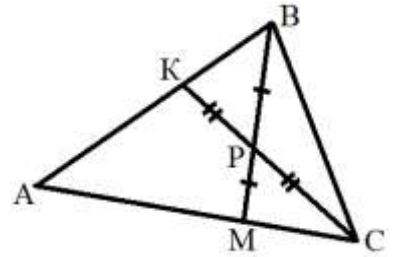
Заметим, что из любой пары могли выбрать только одно число – итого 9 чисел, значит, число 19 было точно выбрано и из каждой пары выбрали обязательно по одному числу.

Т.к. 19 выбрано, то число 1 не могло быть выбрано, а значит, из первой пары выбрали число 18. Т.к. 18 выбрано, то число 2 не могло быть выбрано, а значит, из второй пары выбрали число 17. И т.д. Т.о., были выбраны числа 10, 11, 12, ..., 19.

6. Катя нарисовала на доске треугольник ABC . На сторонах AB и AC она отметила точки K и M , соответственно, такие, что отрезки CM и BK пересеклись в точке O . По мнению Кати точка O поделила отрезки CK и BM пополам. Докажите, что Катя где-то ошиблась.

Решение.

Рассмотрим треугольники KPB и PMC . Эти треугольники равны: $KP=PC$, $BP=PM$, угол KPB = углу CPM (как вертикальные). Значит, равные соответствующие элементы этих треугольников: угол KBP равен углу $СMP$. Но эти углы являются вертикальными, при прямых AB и AC , и секущей BM . А значит, прямые AB и AC параллельны, что противоречит условию.



7. Ирина купила печенье в виде букв русского алфавита. Одинаковые буквы стоят одинаково, а разные имеют различные цены. Известно, что слово $ТАНК$ стоит 60 рублей, слово $КНУТ$ стоит 90 рублей, а слово $КАРТОН$ стоит 160 рублей. Сколько стоит слово $КОНТУР$?

Решение. **Ответ: $160 + 90 - 60 = 190$.**

Если сложить все буквы слов $КАРТОН$ и $КНУТ$ и вычеркнуть буквы слова $ТАНК$, то мы получим все буквы необходимые для слова $КОНТУР$. Откуда мы и можем вычислить стоимость этого слова.

8. В 12:00 по местному времени из Магнитогорска в Париж вылетел самолет, совершил там посадку в 18 часов местного времени и отправился обратно в 21 час местного времени. Самолет вернулся на следующий день в Магнитогорск в 11 утра местного времени. Сколько часов длится перелет самолета между городами?

Решение. **Ответ: 16 часов.**

Обозначим разницу местного времени между городами в X часов. (В Париже на X часов местное время меньше, чем в Магнитогорске). Когда в Магнитогорске 12 часов, в Париже 12- X . Когда в Париже 21 час, в Магнитогорске 21+ X . Т.о., время полета: $18-(12-X)=6+X$, или $11+24-(21+X)=14-X$. Это время одинаково, а значит:

$6+X=14-X$, откуда получаем, что $X=4$, а время полета составит 10 часов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 2. 21.04.2015

1. Найдите два числа, идущих подряд; у первого из них сумма цифр равна 2015, а второе – делится на 2015.

Решение.

Заметим, что у числа 2015 сумма цифр равна 8. У числа, запись которого состоит из 252 чисел «2015» сумма цифр составит $8 \cdot 252 = 2016$. Т.о., возьмем число 20152015...2015 (252 раза) и число 20152015...20152014.

2. Докажите, что любой неравносторонний треугольник можно разрезать на несколько (конечное число) треугольников, у каждого из которых есть угол, равный 60 градусов.

Решение.

Пусть ABC – наш треугольник, причем угол A меньше 60 градусов, а угол B больше 60 градусов (в любом треугольнике найдется один угол меньше 60 градусов и один больше 60 градусов). Тогда на стороне AC найдется такая точка T , что угол BTC равен 60 градусов. Пусть TL - биссектриса угла ATB , величина которого равна 120 градусов (точка L лежит на стороне AB). Тогда наш треугольник разрезается на треугольники ATM , BTM и BTC , в каждом из них есть угол в 60 градусов.

3. Турнир математических боев проходил в течение пяти дней. Каждый день команда из 6 человек получала восемь задач. Каждый день команда решала на одну задачу больше, чем в предыдущий, каждую задачу решил только один, а в итоге все решили поровну задач. Сколько задач решила команда в последний день турнира?

Решение.

Общее количество решенных задач делится на 6. Достаточно рассмотреть 5 вариантов: от 0 до 4, от 1 до 5, ..., от 4 до 8. Подходит только последний вариант.

4. В треугольнике ABC провели медиану AM . В треугольниках AMC и AMB провели медианы MP и MT , соответственно. Оказалось, что $MP=MT$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение.

Т.к. MP и MT медианы, то P и T середины сторон AC и AB , соответственно. Значит TP – средняя линия треугольника ABC , следовательно, TP параллельна BC . В треугольнике TPM : $TM=MP$, значит он равнобедренный, следовательно, угол $МТР$ равен углу $МРТ$. Углы $МТР$ и $ТМВ$ накрест лежащие, значит, они равны. Аналогично углы $МРТ$ и $РМС$ накрест лежащие, значит они равны. Получаем равенство углов: $\angle РМС = \angle МРТ = \angle МТР = \angle ТМВ$. А теперь посмотрим на треугольники $РМС$ и $ТМВ$. Они равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $\angle ТВМ = \angle МСР$. Из этого и получаем, что треугольник ABC равнобедренный.

5. На международную конференцию прибыло по два участника из 27 стран. Можно ли так рассадить всех участников за круглым столом, чтобы между каждыми двумя участниками из одной страны сидело ровно 9 других участников?

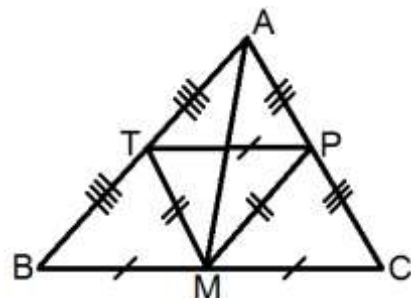
Решение. **Ответ: Нельзя.**

Раскрасим 54 места в два цвета так, чтобы соседние были разных цветов. Если требуемая в условии рассадка существует, то оба представителя одной страны сидят на местах одного цвета, откуда следует, что количество мест каждого цвета четно. Но их по 27, получили противоречие.

6. Есть 100 карточек, у каждой из которых одна сторона черная, а другая – белая. Карточки лежат на столе белой стороной вверх. Костя перевернул 50 карточек, затем Сережа перевернул 60 карточек, а после этого Оля перевернула 70 карточек. В результате все 100 карточек оказались перевернуты черной стороной вверх. Сколько карточек могло быть перевернуто три раза?

Решение. **Ответ: 40 карточек.**

Карточки могут быть перевернуты не более, чем по 3 раза и должны быть перевернуты нечетное число раз. Следовательно, каждая карточка перевернута 1 или 3 раза. Всего было 180 перевернутых. Пусть A карточек переворачивали по 3 раза, тогда $180 = 3A + (100 - A)$, откуда $A=40$. Пример строится легко.



7. Света и Наташа решили продолжить свою игру, только в этот раз Наташа ставит 2 игровых кубика на стол. А Света перекачивает один из кубиков на соседнюю грань и записывает числа на верхних гранях в тетрадь. После чего девочки повторяют свои операции. Если Света сможет в какой-то момент получить сумму записанных чисел равной 2015, то она выиграет. Если сумма чисел в какой-то момент превысит 2015, то выиграет Наташа. Кто может обеспечить победу при любой игре соперника?

Решение. **Ответ: Выиграет Наташа.**

Наташа должна повторить тактику с прошлой игры, но внося небольшие изменения. Если сумма уже составляет 2008-2014, то Наташе стоит поставить 2 кубика гранями с «6» вверх. Тогда Света точно прибавит к сумме не меньше 8, и получит больше 2015. Если сумма будет меньше 2008, то Наташа должна ставить игровые кубики гранями с «1» вверх, тогда Света будет к сумме прибавлять максимум по 6 ($1+5$), и не сможет сразу попасть на 2015. И в итоге когда-нибудь попадет в промежуток 2008-2014.

8. В таблице 1000 на 4 в верхней строке записаны числа 1, 9, 6, 8. Следующая строка заполняется т.о.: в каждую клетку пишется сумма трех чисел предыдущей строки, не стоящих над этой клеткой, уменьшенная на число, стоящее над данной клеткой. Какое число будет стоять в правом нижнем углу таблицы?

Решение. **Ответ: 2^{2001} .**

Во второй строке таблицы будут числа 22, 6, 12, 8, в третьей – 4, 36, 24, 32. Как видим, получилась первая строка, умноженная на 4. Поэтому четвертая строка будет равна умноженной на 4 второй, и в

дальнейшем каждые две следующие строки будут получаться из двух предыдущих умножением на 4. Отсюда - ответ.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ № 3. 22.04.2015

1. На каждой из десяти карточек записали по одной цифре так, чтобы все цифры были различными. Выбрав несколько карточек, Петя составил из них два последовательных натуральных числа. Какие наибольшие числа он мог составить?

Решение. Ответ: 79 и 80.

Пусть искомые числа – трехзначные (или больше). Тогда у этих чисел или должны быть одинаковыми первые цифры, или хотя бы две последние цифры меньшего числа должны быть девятками. Это невозможно, т.к. все цифры различны. Если эти два числа двузначные, то из первых цифр должны быть различны. Значит, последняя цифра меньшего из чисел равна 9, а большего – 0. Из всех возможных вариантов 79 и 80 – наибольшая пара.

2. В группе из 2015 человек имеется один математик. Каждый знает, кто математик, но стесняется его назвать. Инспектор Патэрсон может выделить любую группу среди этих 8 человек, состоящую более чем из одного человека, и задать вопрос: «Имеется ли среди вас математик?» На этот вопрос все отвечают правду. За какое наименьшее количество вопросов инспектор может гарантированно определить математика?

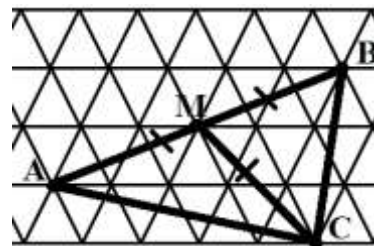
Решение. Ответ: За 11 вопросов.

Идея – половинное деление. Делим группу пополам и задаем одной группе вопрос. Т.о., мы узнаем в какой половине находится математик. За 11 действий ($2^{11} = 2048$) мы точно узнаем, где находится математик. Если группы делить по-другому, и в какой-то момент будет одна из 2-х групп больше, чем 2^{11-n} людей (где n – количество заданных вопросов), то после каждого последующего вопроса математик может оказаться в большей группе, где будет не менее $2^{11-(n+k)} + 1$ людей (где k – количество новых вопросов).

3. У Дианы есть 12 одинаковых разноцветных вагончиков (некоторые, возможно, одного цвета, но неизвестно, сколько вагончиков какого цвета). Петя считает, что различных 12-вагонных поездов он сможет составить больше, чем 11-вагонных. Не ошибается ли Петя? (Поезда считаются одинаковыми, если в них на одних и тех же местах находятся вагончики одного и того же цвета).

Решение. Ответ: Петя ошибается.

Между всеми 12-вагонными поездами и 11-вагонными поездами можно установить взаимно однозначное соответствие. Для каждого 11-вагонного поезда мы откладываем один вагон, если его мы присоединим к концу, то получим 12 вагонный поезд. Т.е., для каждого 11-вагонного поезда есть 12-вагонный. Если из каждого 12-вагонного поезда забираем последний вагончик, то мы получим 11-вагонный поезд, при этом все такие поезда будут различные.



4. На сетке из равносторонних треугольников построен угол ABC.

Найдите его величину.

Решение. Ответ: 90°.

Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M – середина AB, тогда CM – медиана этого треугольника. Заметим, что $AM = BM = CM$, т.е. медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник ABC – прямоугольный: следовательно угол ACB равен 90 градусов.

5. На шахматной доске изначально расставлено N ладей. Разрешается поставить на пустую клетку дополнительную ладью, если она угрожает не менее чем трем имеющимся на доске ладьям. При каком наименьшем N можно заполнить ладьями всю доску? (Ладья угрожает фигуре, если находится с ней на одной горизонтали или вертикали и между ними нет других фигур).

Решение.

Расставим 10 ладей следующим образом: 4 ладьи по углам и 6 ладей на одной из диагоналей. Легко видеть, что при такой расстановке можно сначала заполнить ладьями все граничные клетки доски, а потом заполнить все остальные клетки.

Покажем, что меньшим количеством ладей обойтись нельзя. В самом деле, в углах доски ладьи обязаны стоять, поскольку ладья, стоящая в углу, угрожает не более чем двум ладьям. Осталось 6 пустых вертикалей и горизонталей. Если на какой-нибудь горизонтали не будет ни одной ладьи, то на эту горизонталь нельзя поставить ни одной ладьи. Значит, на каждой вертикали и каждой горизонтали должна быть хотя бы одна ладья.

6. $1 > x > y > 0$. Докажите, что $\frac{x-y}{1-xy} < 1$.

Решение.

$$1 - \frac{x-y}{1-xy} = \frac{1-xy-x+y}{1-xy} = \frac{(1-x)(1+y)}{1-xy} > 0.$$

7. У Светы и Наташи в этот раз набор из 2015 игральных кубиков. За ход каждая девочка может сделать один из 2-х ходов: либо поставить на стол кубик из набора на любую грань, либо перевернуть один из кубиков, стоящих на столе, на соседнюю грань. Кубики, которые перевернули один раз, больше перевертывать нельзя. Первой ходит Наташа. Выигрывает та девочка, после хода которой сумма чисел на верхних гранях станет равной 2015. Кто может обеспечить победу при любой игре соперника?

Решение. **Ответ: Выиграет Наташа.**

Идея решения – дополнение до 7. $2015 = 6 \pmod{7}$. Наташа первый кубик ставит «6» вверх. Затем, каждый ход дополняет общую сумму до числа вида $7k+6$. Если Света поставила новый кубик, то Наташа ставит кубик т.о, чтобы дополнить новое (Светино число) до 7 ($6+1$, $5+2$, $4+3$). Если Света какой-то кубик перевернула на соседнюю грань, то она либо увеличила сумму на новое число, и тогда Света легко дополнит его до 7, либо уменьшила на число «А» меньшее 5. В последнем случае Наташа поставит новый кубик так, чтобы число «А» оказалось на верхней грани. Общая сумма после таких двух действий не поменялась, но количество кубиков увеличилось на 1. Значит, Света операций «перевертывания» сделает конечное число раз, и после сумма опять начнет расти. Света не сможет выиграть, т.к. она не может получить число вида $7k+6$.

8. На каждой из 100 карточек записано по одному числу, отличному от нуля, так, что каждое число равно квадрату суммы всех остальных. Какие это числа?

Решение. **Ответ: Сто чисел, каждое из которых равно $\frac{1}{99^2}$.**

Докажем, что все записанные числа должны быть одинаковыми. Действительно, каждое из этих чисел является квадратом числа, отличного от нуля, поэтому все записанные числа должны быть положительными. Предположим, что число, записанное на одной из карточек, больше числа, записанного на другой. Отложим карточку с большим числом в сторону. По условию это число равно квадрату суммы остальных чисел. Поменяем местами карточки с большим и меньшим числами. Тогда отложенное число уменьшилось, а сумма всех остальных чисел (а значит и ее квадрат) увеличилась, и равенство уже выполняться не может.

Обозначим число, записанное на каждой карточке, через x . Тогда $(x+x+x+\dots+x)^2=x$, т.е. $(99x)^2=x$. Т.к. x не равен нулю, то $x = \frac{1}{99^2}$.