Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2017-2018 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35

1. В ящике лежали шары. Известно, что синих шаров было в 6 раз больше, чем не синих шаров, а красных шаров было в 6 раз меньше, чем не красных. Могли ли быть в ящике зеленые шары?

Ответ: нет

Решение. Пусть в ящике x не синих шаров. Тогда синих шаров $6x$, а их доля в общем числе шаров равна $\frac{6}{7}$.

Пусть также количество красных шаров равно у. Тогда не красных шаров 6у. Значит, доля красных шаров в общем числе шаров равна. $\frac{1}{7}$.

Суммарная доля синих и красных шаров равна 1. Поэтому других шаров в ящике нет.

Оценивание: за верное решение – 7 б.

2. В парке по его периметру проложили тропу здоровья. По ней любят ходить со скандинавскими палками пенсионеры Андрей Иванович и Татьяна Алексеевна. Если они двигаются в противоположных направлениях, то встречаются каждые 6 минут, а если идут в одном направлении, то Андрей Иванович догоняет Татьяну Алексеевну каждые полчаса. Найдите скорости каждого из пенсионеров.

Ответ: скорость Андрея Ивановича 6 км/ч, а Татьяны Алексеевны 4 км/ч.

Решение. Пусть скорость Андрея Ивановича x км/ч, а Татьяны Алексеевны y км/ч. Если они двигаются в противоположных направлениях, то скорость их сближения $x + y$, а если идут в одном направлении, то Андрей Иванович догоняет Татьяну Алексеевну со скоростью $x - y$. Из системы уравнений

$$(x + y) \cdot \frac{1}{10} = (x - y) \cdot \frac{1}{2} = 1$$

находим $x = 6$, $y = 4$.

Оценивание. За верное решение – 7 б.

3. По кругу записаны 10 чисел. Назовем число успешным, если оно больше полусуммы двух записанных рядом с ним чисел. Каково наибольшее возможное количество успешных чисел?

Ответ: 9.

Решение. *Оценка.* Наименьшее из записанных чисел не может быть успешным (если x – наименьшее число, а рядом стоят числа a и b, то $x \le a$, $x \le b$, откуда $x \le \frac{a+b}{2}$). Значит, успешных чисел не больше 9.

Пример. Пусть по кругу стоят числа 100, 99, 97, 94, 90, 85, 79, 72, 64, 55. Здесь все числа, кроме 55, успешные.

Оценивание. Если получена только оценка, 2 б. За пример без оценки 5 б. За верное решение– 7 б.

4. Имеются 32 монеты, все разного веса. Можно ли за 35 взвешиваний на чашечных весах (без гирь) выбрать из них две наиболее тяжелые?

Ответ: можно.

Решение. Проведем «турнир по олимпийской системе» среди монет. В первом круге разобьем монеты на 16 пар, и в каждой выберем более тяжелую. Победителей разобьем на 8 пар и т.д. В результате за 16 + 8 + 4 +2 + 1 = 31 взвешиваний найдем самую тяжелую монету. Вторая по тяжести монета находится среди тех пяти монет, с которыми сравнивалась самая тяжелая (любая другая легче какой-то монеты, которая легче самой тяжелой). Из этих 5 монет за 4 взвешивания найдем самую тяжелую (первую монету сравниваем со второй, более тяжелую из них – с третьей и т.д.).

Оценивание. За верное решение – 7 б.

5. Можно ли разбить прямоугольник 5×7 клеток на уголки, состоящие из 3 клеток, и квадратики 2×2?

Ответ: нельзя.

Решение. Если прямоугольник разбит на x трехклеточных уголков и y квадратиков 2×2 , то выполнено равенство $3x + 4y = 35$. Небольшой перебор показывает, что это уравнение имеет три решения в неотрицательных целых числах: (1; 8), (5; 5); (9; 2). отсюда число фигурок $x + y \le 11$.

К этому выводу можно было прийти и без решения уравнения. Действительно,

$$3(x+y) \le 3x + 4y = 35 \text{ и}$$

$$x + y \le \frac{35}{3} < 12$$

С другой стороны, отметим звездочками следующие 12 клеток.

*		*		*		*
*		*		*		*
*		*		*		*

Ни уголок, ни квадратик не могут покрыть одновременно две звездочки. Значит, фигурок должно быть не меньше 12. Противоречие!

Замечание. После того, как установлено, что фигурок не менее 12, можно было заметить, что в этом случае общая площадь фигурок не меньше 36, что превышает площадь всего прямоугольника.

Оценивание. За верное решение 7 б. Если составлено и решено в неотрицательных числах уравнение $3x + 4y = 35$ (без дальнейшего продвижения), 2 б.