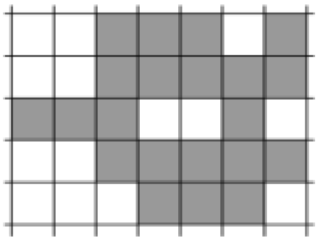
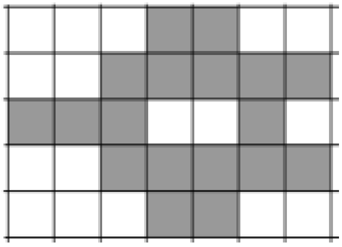
XXV Магнитогорский турнир юных математиков “Кубок управления образования»
Решения командной олимпиады

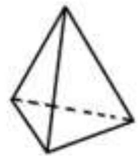
1. Перекрасьте ровно 3 клетки в белый цвет так, чтобы у получившейся фигуры была ось симметрии.



Решение:



2. Дмитрий Игоревич хочет расставить числа 1, 2, 3, … , 10 на ребрах и гранях тетраэдра, чтобы соблюдалось следующее условие: число, записанное на грани, равнялось сумме чисел, записанных на трёх ребрах, образующих эту грань. Получится ли у него это сделать?



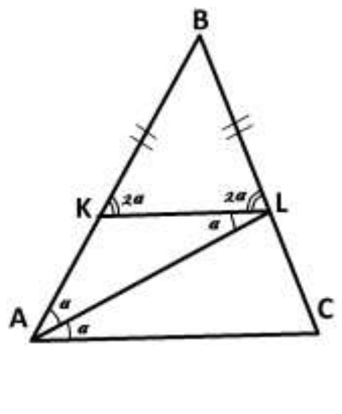
Ответ: Нет, не получится.
Решение: Заметим, что каждое число на ребре учитывается для двух чисел на гранях. Таким образом, если сложить числа на гранях, мы получим сумму чисел на всех ребрах, умноженную на 2. Если сложить 4 наибольших числа, то получим сумму $7 + 8 + 9 + 10 = 34$. А если сложить 6 самых маленьких чисел, и умножить полученную сумму на два получим: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 2 = 42$. Таким образом, на гранях сумма не больше 34. А удвоенная сумма ребер не меньше 42, т.е. равенства не получится в любом случае.

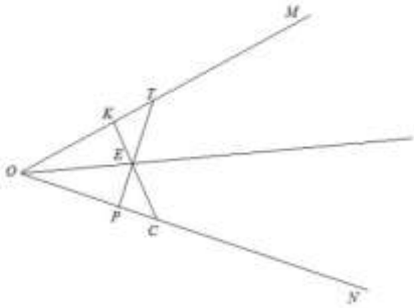
3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 4 равнобедренных треугольника.
Решение: В любом треугольнике есть высота, падающая на противоположную сторону, а не на её продолжение. Так что каждый треугольник можно разбить на 2 прямоугольных. Если в прямоугольном треугольнике провести медиану к гипотенузе, то он разобьётся на 2 равнобедренных (т.к. медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине). Таким образом, можно любой треугольник разбить на 4 равнобедренных.

4. Электронные часы показывают часы минуты и секунды (например: 16:33:07). Сколько раз за один день встречается на часах число 2017, образованное четырьмя подряд идущими цифрами?
Ответ: 84 раза.
Решение: Заметим, что цифра 7 может быть только в разряде единиц в секундах или в минутах. Таким образом получаем следующие варианты:
1) **:20:17 – встречается 24 раза (каждый час)
2) 20:17:** - встречается 60 раз (одну минуту – 60 вариантов)
Откуда легко находим ответ: $60 + 24 = 84$.

5. Можно ли расставить числа от 1 до 25 по кругу таким образом, чтобы сумма любых двух соседних чисел делилась на 3?
Решение: Предположим, что так расставить числа можно. Тогда справа от 3 стоит число, делящееся на 3, справа от него – тоже число, делящееся на 3, и так далее. Значит, все расставленные числа делятся на 3. Противоречие.

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L. Прямая параллельная AC, проходящая через точку L, пересекает AB в точке N. Оказалась, что BLN – равнобедренный ($BN = BL$). Докажите, что треугольник ABC тоже равнобедренный.
Решение: Треугольник BKL – равнобедренный, значит $\angle BKL = \angle BLK$. Прямые KL и AC параллельны, значит $\angle BKL = \angle BAC$ и $\angle BLK = \angle BCA$
и все 4 углы равны между собой. Откуда и следует, что треугольник ABC – равнобедренный.





7. На сторонах угла MON отмечены точки K, P, T и C так, что $OK = OP$ и $KT = PC$ (см. рисунок). Прямые KC и PT пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE – биссектриса угла MON.
Решение: 1. Рассмотрим треугольники OPT и OKC. Они равны по двум сторонам и углу между ними ($OT = OC$, $OK = OP$, угол O – общий). Следовательно, $\angle OTP = \angle OCK$.
2. Рассмотрим треугольники KET и PEC. Они равны по стороне и двум прилежащим к ней углам ($KT = PC$, $\angle KET = \angle PEC$ как вертикальные и $\angle OTP = \angle OCK$ из доказанного ранее). Следовательно, $ET = EC$.
3. Рассмотрим треугольники OET и OEC. Они равны по трём сторонам (OE – общая, $OT = OC$, $ET = EC$). Значит, $\angle EOK = \angle EOP$, т.е. OE – биссектриса угла O.

8. Четыре пирата нашли клад с золотом. После этого кто-то один из них украл клад и спрятал его. У костра они обсуждали произошедшее.
Крис: «Золото не у меня».
Стэн: «У Криса нет золота».
Пит: «Золото у Криса или Стэна».
Джек: «Пит лжёт».
Выясните у кого золото, если известно, что солгал только тот, кто забрал себе клад.

Ответ: Золото у Пита.
Решение: Посмотрим на высказывание Джека. Если он лжёт, то во-первых он украл золото, а во-вторых Пит лжёт, а значит и Пит должен был украсть золото, чего быть не может. Значит, Джек говорит правду и он не крал золото. Тогда Пит лжёт, и он должен был украсть золото. И правда в этом случае все условия соблюдаются, этот вариант подходит, и он единственный.