

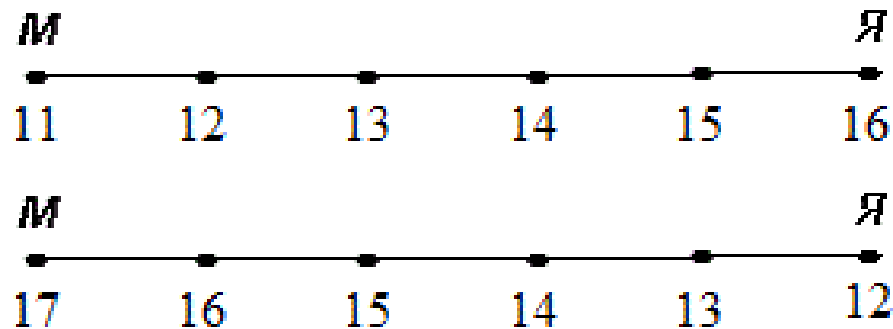


Первый тур

Каждая задача – 6 баллов



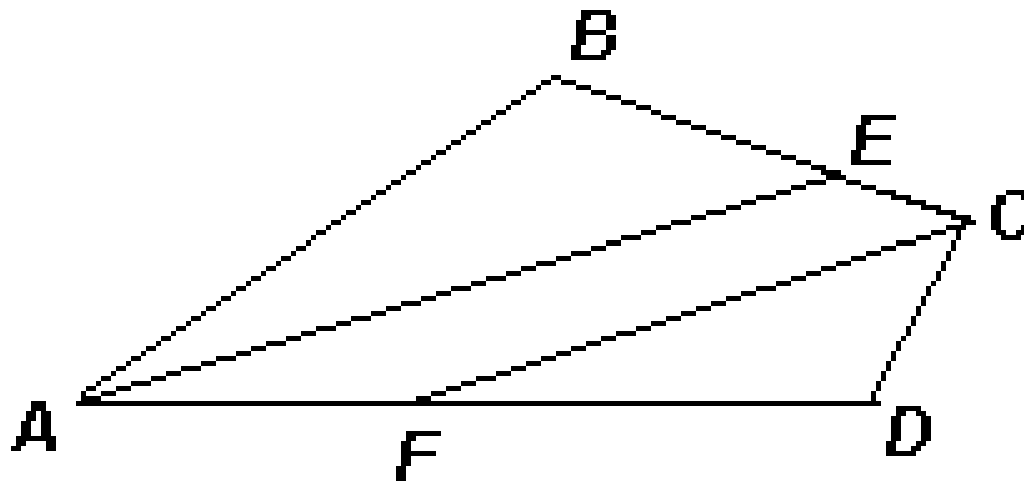
1.1 Два автобуса ехали навстречу друг другу с постоянными скоростями. Первый выехал из Москвы в 11 часов утра и прибыл в Ярославль в 16 часов, а второй выехал из Ярославля в 12 часов и прибыл в Москву в 17 часов. В котором часу они встретились?



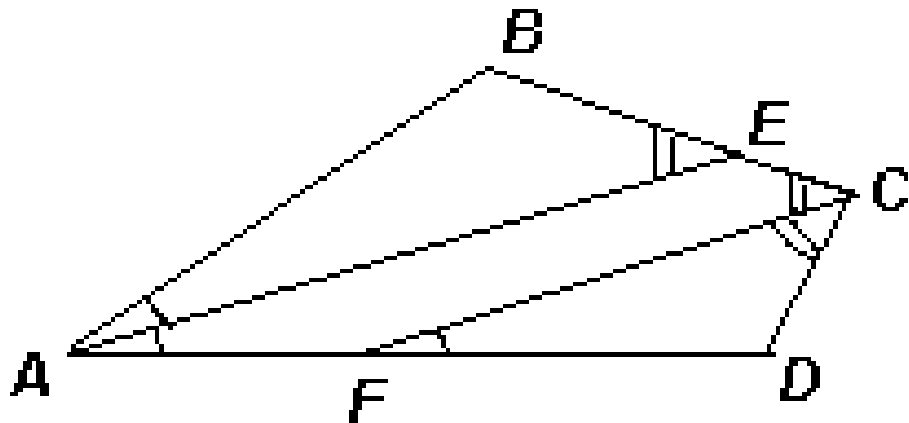
Решение: Так как каждый автобус ехал ровно 5 часов, то за час они проезжают одинаковые расстояния: $\frac{1}{5}S$, где S — длина пути от Москвы до Ярославля. К тому времени, как выехал второй автобус, первый успел проехать $\frac{1}{5}S$. После этого каждый автобус до встречи преодолел расстояние, равное $\frac{2}{5}S$. Следовательно, автобусы встретились через 2 часа после выезда второго, то есть в 14 часов.

Ответ: в 14 часов.

1.2. В четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы AE и CF углов A и C параллельны (см. рисунок). Докажите, что углы B и D равны.



Решение: Из условия задачи и равенства соответственных углов при параллельных прямых следует, что $\angle CFD = \angle EAD = \angle EAB$ и что $\angle BEA = \angle BCF = \angle DCF$ (см. рис). Тогда два угла треугольника ABE соответственно равны двум углам треугольника CDF . Следовательно, равны и третьи углы этих треугольников: $\angle ABE = \angle CDF$.





2.3. В поезде Москва – Тьмутаракань ввели сплошную нумерацию мест в вагонах. Во всех вагонах одинаковое количество мест.

Известно, что места 385 и 416 находятся в одном вагоне, а места 544 и 577 находятся в разных вагонах, причем эти вагоны – не соседние. Сколько мест в одном вагоне? Ответ обоснуйте.

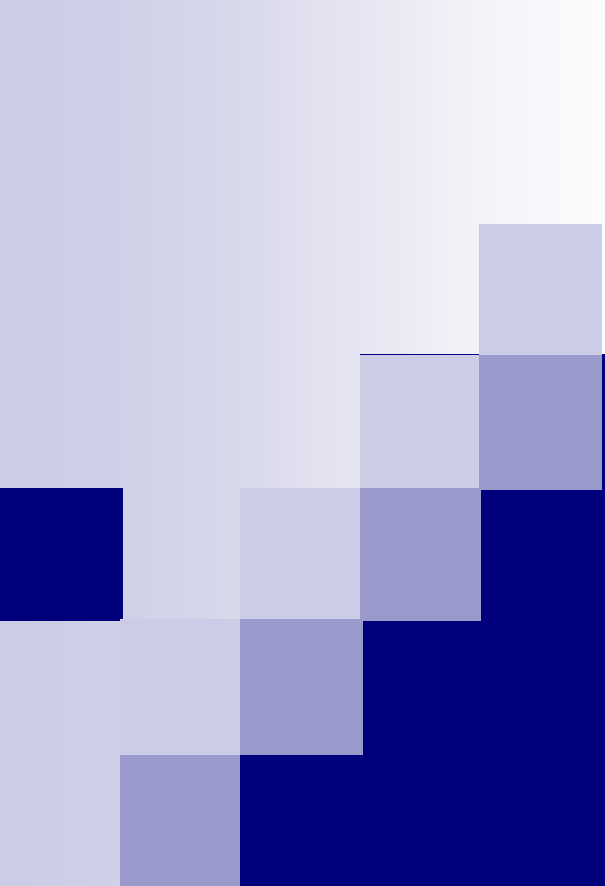


Решение: Поскольку места 385 и 416 находятся в одном вагоне, то количество мест в вагоне не меньше, чем $416 - 385 + 1 = 32$. С другой стороны, между местами 544 и 577 находится $577 - 544 - 1 = 32$ места. Это означает, что в одном вагоне не больше, чем 32 места. Таким образом, в вагоне ровно 32 места

Ответ: 32 места



10:00



Второй тур

Каждая задача – 7 баллов

2.1. Из четырех неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$ и $x > 5$ два истинны и два ложны. Найдите значение x , если известно, что оно целое.

Первый способ. Для каждого значения x данные неравенства являются логическими высказываниями. Обозначим их: а) $2x > 70$; б) $x < 100$; в) $4x > 25$; г) $x > 5$. 1) Если истинно а), то истинны в) и г), то есть три высказывания истинны, что противоречит условию. Следовательно, неравенство а) $2x > 70$ – ложно, значит, $x \leq 35$. 2) Если истинно высказывание $x \leq 35$, то высказывание б) также истинно, поэтому, из высказываний в) и г) одно должно быть истинно, а другое – ложно. 3) Если истинно высказывание в), то истинно и г) – противоречие. Следовательно, высказывание в) ложно, тогда $x \leq 6$. Значит, высказывание г) должно быть истинно. Таким образом, $5 < x \leq 6$, то есть $x = 6$.



Второй способ. Учитывая, что x — целое число, данные неравенства можно переписать так: $x > 5$, $x > 6$, $x > 35$ и $x < 100$. Если неверно, что $x < 100$, то остальные три неравенства — верные, что противоречит условию. Значит, из трех неравенств: $x > 5$, $x > 6$ и $x > 35$ — одно верное и два неверных. Так как из третьего неравенства следуют первые два, а из второго неравенства следует первое, то остается принять, что первое неравенство верно, а два других — нет. Таким образом, $5 < x \leq 6$, то есть $x = 6$.

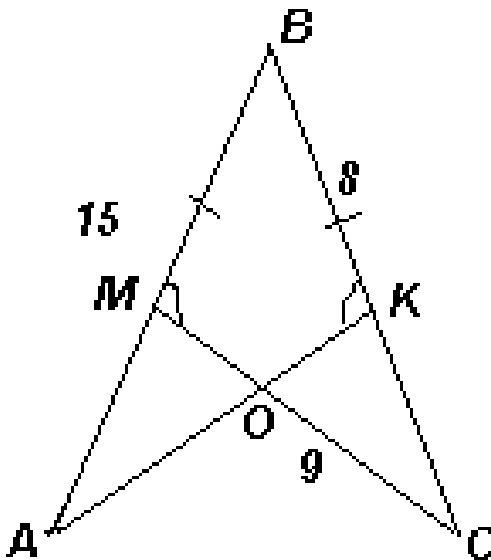
Ответ: 6.

2.2. На сторонах угла ABC отмечены точки M и K так, что углы BMC и BKA равны, $BM = BK$, $AB = 15$, $BK = 8$, $CM = 9$. Найдите периметр треугольника COK , где O – точка пересечения прямых AK и CM .

Решение: У треугольников ABK и CBM – общий угол B , поэтому из условия задачи следует, что эти треугольники равны (по стороне и прилежащим углам). Тогда $\angle BKM = \angle BCM$ и $CK = AM = 7$.

Учитывая также, что $\angle CKO = \angle AMO$ (они дополняют равные углы до развернутых), получим, что $\triangle COK = \triangle AOM$ (по стороне и прилежащим углам). Следовательно, $OK = OM$. Таким образом, $P_{\triangle COK} = CK + CO + OK = CK + CO + OM = CK + CM = 16$.

Ответ: 16.





2.3. Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в карман, а золотую зарыл, и опять выросло дерево. Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в карман, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в кармане у Буратино было 2004 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?



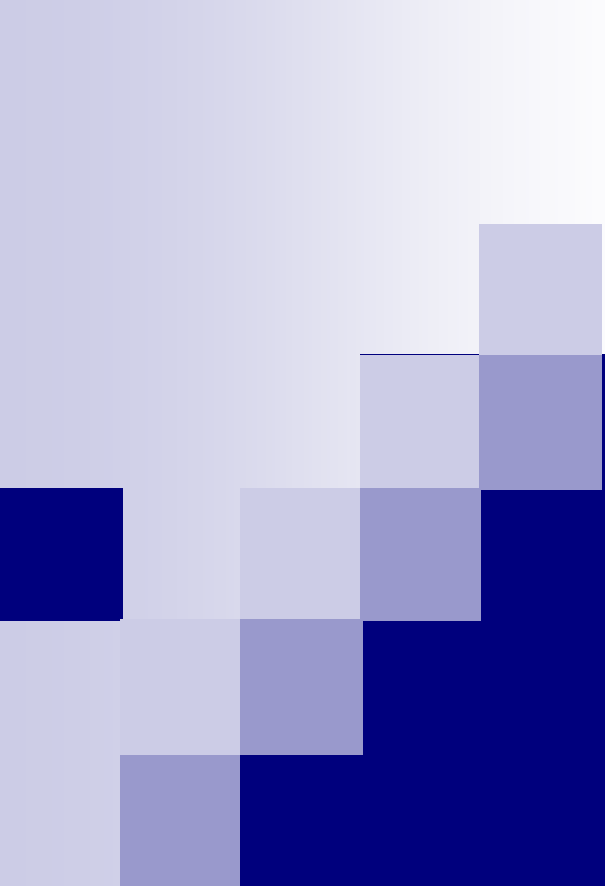
Решение: Назовем монету, из которой что-то выросло – «родителем», а монету, которая выросла из какой-нибудь монеты – «ребенком». Заметим, что «детьми» являются все монеты, кроме первой, а каждая золотая монета (и только она) является «родителем». Поскольку у каждого «родителя» – два «ребенка», то «детей» – в два раза больше, чем «родителей».

Пусть x – количество золотых монет, а y – количество серебряных, тогда всего монет будет $x + y$, из которых «детьми» являются $(x + y) - 1$ монет, а «родителями» – x . Составляем уравнение: $(x + y) - 1 = 2x \Leftrightarrow x = y - 1$, то есть, количество золотых монет меньше количества серебряных на 1, следовательно, Буратино закопал 2003 монеты.

Ответ: 2003.



15:00



Третий тур

Каждая задача – 8 баллов



3.1. Вася задумал три различные цифры, отличные от нуля. Петя записал все возможные двузначные числа, в десятичной записи которых использовались только эти цифры. Сумма записанных чисел равна 231. Найдите цифры, задуманные Васей.

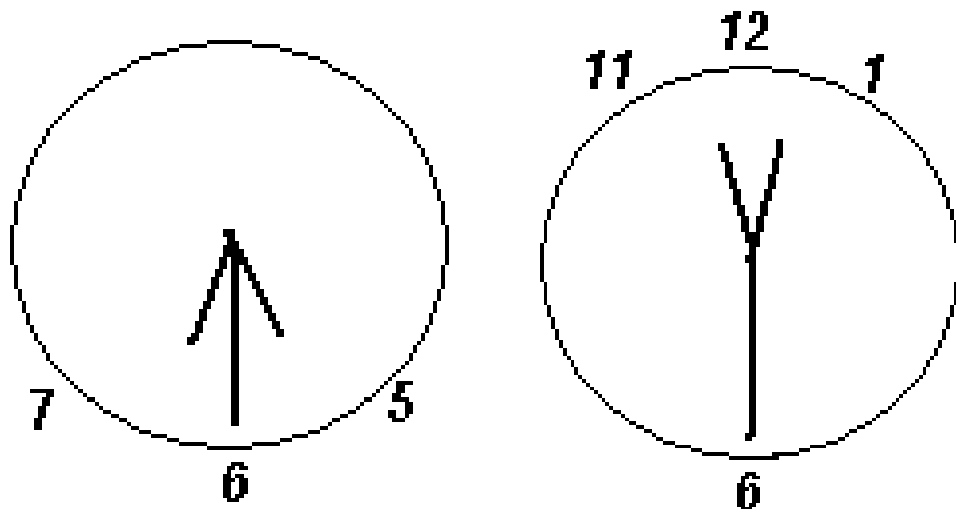
Решение: Пусть a , b и c – три цифры, задуманные Васей. Существует девять двузначных чисел, в десятичной записи которых используются только эти цифры: Найдем их сумму, разложив каждое из чисел в виде суммы разрядных слагаемых: $(10a + a) + (10b + b) + (10c + c) + (10a + b) + (10b + a) + (10a + c) + (10c + a) + (10b + c) + (10c + b) = 33a + 33b + 33c = 33(a + b + c)$. По условию, $33(a + b + c) = 231$, то есть, $a + b + c = 7$. Существует единственная тройка различных и отличных от нуля цифр, сумма которых равна 7.

Ответ: Вася задумал цифры 1; 2 и 4.

3.3. В некоторый момент угол между часовой и минутной стрелками равен α . Через час он опять равен α . Найдите все возможные значения α .

Решение: По прошествии часа минутная стрелка вернется в исходное положение, а часовая пройдет $\frac{1}{12}$ часть окружности, то есть повернется на угол, равный 30° . Равенство углов, указанное в условии, означает, что минутная стрелка является либо биссектрисой угла между двумя положениями часовой стрелки, либо лучом, дополнительным к этой биссектрисе. В первом случае $\alpha = 30^\circ : 2 = 15^\circ$, а во втором случае $\alpha = (360^\circ - 30^\circ) : 2 = 165^\circ$.

Ответ: 15° или 165° .





3.3. В вершинах треугольника записаны числа 1, 2 и 3. Затем каждое из чисел одновременно заменили на сумму двух соседних. Эту операцию проделали еще некоторое количество раз. Могла ли сумма получившихся в итоге трех чисел оказаться равной 3000000?



Решение: Пусть в какой-то момент в вершинах записаны числа a , b и c . Тогда после указанной операции вместо них будут записаны числа $b + c$, $c + a$ и $a + b$. Так как $(b + c) + (c + a) + (a + b) = 2(a + b + c)$, то после каждой операции сумма трёх записанных чисел удваивается. Сумма исходных чисел не делится на 5, поэтому и сумма чисел, полученных после любого количества операций, на 5 делиться не может.

Ответ: нет, не могла.



20:00