

**Ответы на задания школьного этапа Всероссийской олимпиады
школьников по математике**

2019-2020 учебный год

Класс 10

Максимальный балл - 35

(7 баллов за каждое задание)

1. Ответ. 727 023.

Решение. Заметим, что зачёркнута была последняя цифра, т.к. в противном случае после вычитания последняя цифра числа была бы нулевой. Пусть y – последняя цифра исходного числа, x – пятизначное число после зачёркивания. Тогда полученное число равно $10x + y - x = 9x + y = 654321$. Деля это число на 9 с остатком (и учитывая, что y не превосходит 9), получим остаток $y=3$ и частное $x=727\ 02$.

2. Ответ: (3; 0,6), (- 4; 4,8).

Решение.
$$\begin{cases} (x+1)(3x^2 + 5xy) = 144 \\ x^2 + 4x + 5y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 + x)(3x + 5y) = 144 \\ (x^2 + x) + (3x + 5y) = 24 \end{cases}$$

Пусть $x^2 + x = a$, $3x + 5y = b$

$$\begin{cases} ab = 144 \\ a + b = 24 \end{cases} \Rightarrow a = b = 12 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x = 12 \\ 3x + 5y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4; \\ y = 4,8. \\ x = 3; \\ y = 0,6. \end{cases}$$

3. Ответ: 150

Решение. Переведем минуты в часы: 17 мин = $\frac{17}{60}$ ч; 48 мин = $\frac{4}{5}$ ч. С помощью формулы движения вдогонку $s = (v_1 - v_2) t$ найдем скорость сближения, так как известно, что за $t = \frac{4}{5}$ ч. ч первый гонщик в первый раз обогнал второго на круг, то есть на $s = 8$ км. Получаем уравнение: $8 = (v_1 - v_2) \cdot \frac{4}{5}$, $v_1 - v_2 = 10$

	v_1 , км/ч	v_2 , км/ч	S , км
1 гонщик	$x+10$	$\frac{680}{x+10}$	$85 \cdot 8$
2 гонщик	x	$\frac{680}{x}$	$85 \cdot 8$

Т.к. в задаче известно, что на финиш первый пришел раньше второго на 17 минут, то составим и решим уравнение $\frac{680}{x} - \frac{680}{x+10} = \frac{17}{60}$. Решив его,

получим $\begin{cases} x = -160, \\ x = 150 \end{cases}$

4. Ответ: мальчиков могло быть либо 9, либо 13.

Решение. Пусть на дискотеку пришли x мальчиков и y девочек. По условию $x + y \leq 40$. Рассмотрим произвольную пару, состоящую из мальчика и девочки. Если они знакомы, то в такой паре будет брошен взгляд девочки на мальчика, а если не знакомы, то будет брошен взгляд мальчика на девочку. То есть каждой паре соответствует ровно один взгляд. Общее количество таких пар (a , значит, и взглядов) равно xy .

По условию $xy = 117$. Число 117 раскладывается на два натуральных множителя тремя способами: $117 = 1 \cdot 117 = 3 \cdot 39 = 9 \cdot 13$. Так как сумма множителей должна быть не больше, чем 40, то возможен только последний вариант. Значит, $x = 9$ или $x = 13$.

5. Ответ : б) 60

а). Доказательство. Проведем через точку C прямую, параллельную $ВД$. На пересечении этой прямой и прямой $АД$ отметим точку C_1 , $ВС C_1 D$ – параллелограмм. В треугольнике $АС C_1$ имеем: $AC = 15$, $CC_1 = ВД = 8$, $AC_1 = АД + DC_1 = 17$. Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, т.к. $289 = 225 + 64$. Тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник $АС C_1$ – прямоугольный, угол $АС C_1$ – прямой. Тогда, угол $СОД$ прямой, что и требовалось доказать.

б) $S_{ABCD} = 0,5 \cdot AC \cdot ВД = 0,5 \cdot 8 \cdot 15 = 60$.

