Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс

28 февраля 2016г   Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Доказать, что если $a+\frac{1}{a}$ – целое число, то и $a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое число.

7.2. Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

7.3. Дан треугольник ABC, сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC?

7.4. Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли каждый из своего дома навстречу друг другу одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?

7.5. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс

28 февраля 2016г   Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Доказать, что если $a+\frac{1}{a}$ – целое число, то и $a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое число.

7.2. Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

7.3. Дан треугольник ABC, сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC?

7.4. Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли навстречу друг другу каждый из своего дома одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?

7.5. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. На олимпиаде встретились гимназисты, лицеисты и обычные школьники. Некоторые из них встали в круг. Гимназисты всегда врут обычным школьникам, лицеисты — гимназистам, а обычные школьники — лицеистам. Во всех остальных случаях учащиеся говорят правду. Каждый сказал своему правому соседу: «Я — гимназист». Сколько ребят из обычных школ было в этом круге?

8.2. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

8.3. На доске записаны натуральные числа от 1 до 15. Лера выбирает два числа и находит их произведение, а Лада получает оставшиеся тринадцать чисел и находит их сумму. Могут ли результаты девочек совпасть?

8.4. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждому городу присваивается номер, равный количеству выходящих из него дорог. Оказалось, что между городами с одинаковыми номерами дорог нет. Какое наибольшее количество дорог может быть в стране?

8.5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со стороной AD равной 3. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причём известно, что площади треугольников ABE и DCE равны 1. Найдите сторону BC, если известно, что площадь $ABCD$ не превосходит 4.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. На олимпиаде встретились гимназисты, лицеисты и обычные школьники. Некоторые из них встали в круг. Гимназисты всегда врут обычным школьникам, лицеисты — гимназистам, а обычные школьники — лицеистам. Во всех остальных случаях учащиеся говорят правду. Каждый сказал своему правому соседу: «Я — гимназист». Сколько ребят из обычных школ было в этом круге?

8.2. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

8.3. На доске записаны натуральные числа от 1 до 15. Лера выбирает два числа и находит их произведение, а Лада получает оставшиеся тринадцать чисел и находит их сумму. Могут ли результаты девочек совпасть?

8.4. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждому городу присваивается номер, равный количеству выходящих из него дорог. Оказалось, что между городами с одинаковыми номерами дорог нет. Какое наибольшее количество дорог может быть в стране?

8.5. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ со стороной AD равной 3. Диагонали AC и BD пересекаются в точке E, причём известно, что площади треугольников ABE и DCE равны 1. Найдите сторону BC, если известно, что площадь $ABCD$ не превосходит 4.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап 9 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число A+B?

9.2. На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?

9.3. Найти величину выражения $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}=5$ и $x+y+z=2$.

9.4. В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что BM : MC = 2. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP.

9.5. В футбольном турнире участвовало 10 команд, каждая из которых с каждой из остальных сыграла по одному матчу. По окончании турнира выяснилось, что для любой тройки команд найдутся две команды из этой тройки, набравших равное число очков в играх с командами из этой тройки. Доказать, что все команды можно разбить не более, чем на три подгруппы таких, что любые две команды из одной подгруппы сыграли между собой вничью. За выигрыш в футболе команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко и за проигрыш — 0 очков.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап 9 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число A+B?

9.2. На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?

9.3. Найти величину выражения $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}=5$ и $x+y+z=2$.

9.4. В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что BM : MC = 2. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP.

9.5. В футбольном турнире участвовало 10 команд, каждая из которых с каждой из остальных сыграла по одному матчу. По окончании турнира выяснилось, что для любой тройки команд найдутся две команды из этой тройки, набравших равное число очков в играх с командами из этой тройки. Доказать, что все команды можно разбить не более, чем на три подгруппы таких, что любые две команды из одной подгруппы сыграли между собой вничью. За выигрыш в футболе команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко и за проигрыш — 0 очков.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
10 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все натуральные числа n, такие, что $\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q.

10.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

10.3. Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y-f(x))=1-x-y$ для произвольных x и y.

10.4. Две окружности пересекаются в точках P и M. На первой окружности выбрана произвольная точка A, отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC.

10.5. Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a,b,c,d,e в некотором порядке, то выполнится равенство $(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)=(a+c)(c+e)(e+b)(b+d)(d+a)$**?**

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
10 класс

28 февраля 2016 Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все натуральные числа n, такие, что $\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q.

10.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

10.3. Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y-f(x))=1-x-y$ для произвольных x и y.

10.4. Две окружности пересекаются в точках P и M. На первой окружности выбрана произвольная точка A, отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC.

10.5. Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a,b,c,d,e в некотором порядке, то выполнится равенство $(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)=(a+c)(c+e)(e+b)(b+d)(d+a)$**?**

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
11 класс

28 февраля 2016   Время написания работы 4 астрономических часа   Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

11.5. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \leq k \leq n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+...+a_k}{k}, \frac{a_2+...+a_k}{k-1}, ..., \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+...+a_n}{n}$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
11 класс

28 февраля 2016   Время написания работы 4 астрономических часа   Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

11.5. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \leq k \leq n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+...+a_k}{k}, \frac{a_2+...+a_k}{k-1}, ..., \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+...+a_n}{n}$.