

XXVI городская математическая регата

Решения задач

1.1. Двоечник Захарка выбрал число, отличное от нуля, сложил четвертую степень и квадрат этого числа, и сообщил результат отличнику Мишеньке. Сможет ли Мишенька однозначно определить число, которое выбрал Захарка?

Ответ: нет, не сможет.

Решение. Предположим, что Захарка выбрал число 1. Так как $1^4 + 1^2 = 2$, то результат, который он сообщит Мишеньке – число 2. Но то же самое число 2 он сообщит Мишеньке, если задумает число -1 , поскольку $(-1)^4 + (-1)^2 = 2$.

Замечание: Так как равенство $(-a)^2 + (-a)^4 = a^2 + a^4$ справедливо для любого a , то какое бы число Захарка изначально не выбрал, Мишенька его определить не сможет.

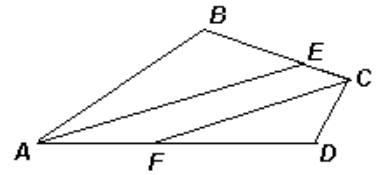
Критерии:

6 – приведен пример,

0 – решения нет.

1.2. В четырёхугольнике $ABCD$ проведены биссектрисы углов A и C (см. рисунок). Оказалось, что углы $\angle EAD = \angle CFD$. Докажите, что углы B и D равны.

Решение: Из условия задачи и равенства соответственных углов EAD и CFD при секущей AD следует, что $AE \parallel CF$, а т.к. AE и CF – биссектрисы углов A и C , то имеем: $\angle CFD = \angle EAD = \angle EAB$ и $\angle BEA = \angle BCF = \angle DCF$. Тогда два угла треугольника ABE соответственно равны двум углам треугольника CDF . Следовательно, равны и третьи углы этих треугольников: $\angle ABE = \angle CDF$.



Можно также использовать свойства других углов при параллельных прямых и секущей.

Критерии:

6 – полное решение,

2 – доказано равенство углов BAE и CFD , углов AEB и FCD ,

0 – решения нет.

1.3. Два бизнесмена Вован и Толян выехали навстречу друг другу с постоянными скоростями. Вован выехал из Магнитогорска в Челябинск в 9:30 утра и прибыл в Челябинск в 14:30, а Толян выехал из Челябинска в 10:30 и прибыл в Магнитогорск в 15:30. В каком часу они встретились?

Ответ: в 12:30.

Решение: Так как каждый бизнесмен ехал ровно 5 часов, то за час они проезжают одинаковые расстояния, равные $\frac{1}{5}S$, где S – длина пути от Магнитогорска до Челябинска. К тому времени, как выехал Толян, Вован успел проехать $\frac{1}{5}S$. После этого до встречи каждый проехал расстояние, равное $\frac{2}{5}S$. Следовательно, бизнесмены встретились через 2 часа после выезда Толяна, то есть в 12:30.

Критерии:

6 – полное решение,

1 – правильный ответ,

1 – решение на частном случае, в результате которого получен правильный ответ

0 – решения нет.

2.1. На доске написано несколько чисел, среди которых нет одинаковых. Известно, что среднее арифметическое каких-то двух чисел из этого набора равно среднему арифметическому каких-то трёх чисел из набора и равно среднему арифметическому каких-то четырёх чисел из набора. Каково наименьшее возможное количество чисел в таком наборе?

Ответ: 5 чисел.

Решение. Условию задачи удовлетворяют числа 1, 2, 3, 4, 5. Действительно, $\frac{2+4}{2} = \frac{2+3+4}{3} = \frac{1+2+4+5}{4} = 3$.

Докажем, что четыре числа в наборе быть не может.

Пусть $\frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c+d}{4}$, тогда $a + b = c + d$. Далее достаточно рассмотреть два случая:

1) В рассматриваемых наборах из двух и трёх чисел совпали два числа, то есть $\frac{a+b}{2} = \frac{a+b+c}{3}$. Тогда $a + b = 2c$. С учетом условия, полученного ранее, $2c = c + d$, то есть $c = d$, что противоречит условию (числа должны быть различны).

2) В рассматриваемых наборах из двух и трёх чисел совпало одно число, то есть $\frac{a+b}{2} = \frac{a+c+d}{3}$. Тогда $a + 3b = 2c + 2d$. С учетом условия, полученного ранее, $a + 3b = 2a + 2b$, то есть $a = b$, что также противоречит условию.

Существуют и другие примеры.

Критерии:

7 – полное решение,

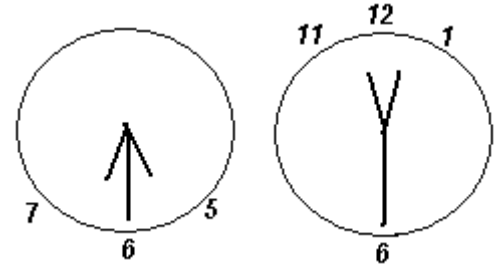
3 – доказано, что 4 не подходит,

2 – правильный ответ и пример на 5 чисел,
остальное – 0.

2.2. Часовая и минутная стрелки в некоторый момент расположились под углом α . Через час угол между ними снова был равен α . Найдите все возможные значения α .

Ответ: 15° или 165° .

Решение. По прошествии часа минутная стрелка вернется в исходное положение, а часовая пройдет $\frac{1}{12}$ часть окружности, то есть повернется на угол, равный 30° . Равенство углов, указанное в условии, означает, что минутная стрелка является либо биссектрисой угла между двумя положениями часовой стрелки (см. первый рисунок), либо лучом, дополнительным к этой биссектрисе (см. второй рисунок). В первом случае $\alpha = 30^\circ : 2 = 15^\circ$, а во втором случае $\alpha = (360^\circ - 30^\circ) : 2 = 165^\circ$.



Критерии:

7 – полное решение,

3 – рассмотрен только один случай из двух,

1 – есть оба ответа,

0 –остальное.

2.3. Маша и 24 её одноклассника в сентябре получили оценки по математике. Известно, что всего было выставлено 22 «пятёрки», 33 «четвёрки» и 55 «троек». Также известно, что и у Маши, и у каждого из её одноклассников стоит либо 3, либо 5 оценок, и «единицу» никто не получал. Докажите, что либо Маша, либо кто-то из её одноклассников получил в сентябре хотя бы одну «двойку».

Решение: так как в классе 25 учеников (нечётное количество) и каждый получил нечётное количество оценок (3 или 5), то всего должно быть выставлено нечётное количество оценок. Но сумма $22 + 33 + 55$ чётная. Значит, учитывая, что «единицу» никто не получал, кому-то из учеников всё-таки поставили «двойку».

Критерии:

7 – полное решение,

2 – есть идея четности, но вывод не сделан,

0 – решения нет.

3.1. Лера записала несколько алгебраических выражений. Вера возвела каждое из них в квадрат, сложила результаты и получила $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$. Не ошиблась ли Вера?

Ответ: Вера ошиблась.

Решение. Пусть выражение $x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1$ равно сумме квадратов нескольких алгебраических выражений, тогда при любых x, y и z его значение неотрицательно. Но, например, при $x = z = 0, y = -1, x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4x + xz + 1 = 1 - 3 + 1 < 0$. Противоречие.

Критерии:

8 – полное решение,

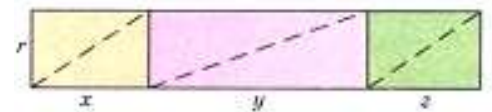
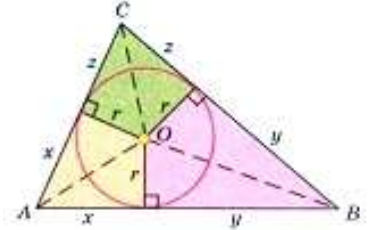
2 – сказано о том, что выражение должно быть неотрицательно,

0 – нет решения.

3.2. В треугольник ABC , длины сторон которого a , b и c , вписали окружность радиус которой равен r . Найдите длину стороны прямоугольника, который является равноставленным с треугольником ABC , если длина другой его стороны равна r . (Два многоугольника называются равноставленными, если один из этих многоугольников можно разрезать на части, из которых можно составить другой многоугольник)

Ответ: $\frac{1}{2}(a + b + c)$.

Решение: рассмотрим треугольник ABC и впишем в него окружность, по условию радиус вписанной окружности равен r . Обозначим центр вписанной окружности точкой O и соединим точку O с вершинами треугольника, а также проведём радиусы окружности, перпендикулярные сторонам треугольника (точка пересечения медиан треугольника равноудалена от сторон треугольника). Так как окружность является вписанной в треугольник, то стороны треугольника являются касательными к окружности. Обозначим равные отрезки касательных за x , y и z (см. рисунок выше). Можно увидеть, что треугольник ABC составлен из 3 пар равных прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету) с катетами x и r , y и r , z и r . Следовательно, полученный прямоугольник со сторонами r и $x + y + z$ (см. рисунок ниже) и треугольник ABC равноставлены. Зная, что периметр треугольника равен $a + b + c$, с другой стороны получили, что периметр треугольника равен $2(x + y + z)$. Отсюда находим длину второй стороны прямоугольника: $\frac{1}{2}(a + b + c)$.



Критерии:

8 – полное решение,

0 – решения нет, остальное – по ходу.

3.3. Оля и Алиса играют в игру. В квадрате 10×10 каждая из них в одну из клеток квадрата по очереди пишет числа от 1 до 100 (каждое из чисел можно записать ровно один раз). Начинает игру Алиса. После заполнения последней клетки девочки считают суммы чисел в каждом квадратике 2×2 . Если какая-то сумма повторится хотя бы 26 раз, то выигрывает Оля, в противном случае – Алиса. Кто выигрывает при правильной игре.

Ответ: выигрывает Оля.

Решение: разобьём поле на 50 вертикальных «доминошек». Если Оля будет каждым своим ходом «дополнять» сумму чисел в каждой доминошке до 101, то после окончания игры в любом квадратике, состоящем из двух «доминошек» сумма чисел будет равна 202. Таких квадратиков получится 45. Следовательно, Оля умеет выигрывать.

Критерии:

8 – полное решение,

0 – решения нет, остальное – по ходу.