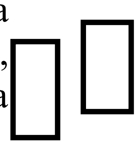
Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Может ли оказаться, что эту задачу правильно решит 1000 участников олимпиады, причем среди них мальчиков будет на 43 больше, чем девочек?
Ответ: нет.
Решение: Пусть x девочек решили эту задачу. Тогда её решили x+43 мальчика. Тогда в сумме её решили $2x+43 = 1000$ человек. Но тогда $2x = 957$ – нечётное число, противоречие.
Критерии: 6 баллов - нет пояснений откуда появилось уравнение.
6 баллов - допущена арифметическая ошибка
5 баллов - нет пояснений что обозначает переменная х в уравнениях
5 баллов - (решение без составления уравнения) сделаны какие-то вычисления, но не пояснено, что с помощью их находится и почему так можно делать.
Только ответ – 0 баллов.

7.2. Лада и Лера загадали по натуральному числу. Если число Лады уменьшить на 5%, а число Леры увеличить на 5%, то результаты будут равны. Оказалось, что загаданные числа — наименьшие из обладающих этим свойством. Какие числа загадали девочки?
Ответ: 21 и 19.
Решение: Пусть Лада загадала число a, а Лера – число b. Тогда новые числа $0{,}95a$ и $1{,}05b$ равны, то есть $0{,}95a = 1{,}05b$. Упростив это равенство, получаем, что $19a = 21b$. Левая часть делится на 19, значит и правая часть делится на 19, но так как 21 и 19 взаимно просты, то $b = 19k$, отсюда $a = 21k$. Среди всех таких чисел наименьшими являются 21 и 19 при $k = 1$.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Не пояснено, почему b должно делиться на 19, а a – на 21 – снимать 1 балл.

7.3. У Ани есть клетчатый квадрат 2015 на 2015, в клетки которого она вписала действительные числа. Оказалось, что в любых трёх клетках, образующих уголок (см. рисунок, уголок можно поворачивать), сумма чисел равна 3. Докажите, что Аня поставила во все клетки 1.



Решение: Выделим произвольный квадратик 2 на 2 с числами a, b, c, d. Рассмотрим два уголка: с числами a, b, c и с числами b, c, d. Тогда $3 = a + b + c = b + c + d$, откуда $a = d$. Легко понять, что весь квадрат 2015 на 2015 заполнен числами a и b в шахматном порядке. Взяв уголки $3 = 2a + b = 2b + a$, понимаем, что $a = b$, откуда и следует утверждение задачи.
Критерии: Разбор частных случаев – 0 баллов. Доказано, что поле заполнено числами a и b в шахматном порядке – 5 баллов.

7.4. Даша загадала натуральное число и утверждает, что оно не больше произведения своих цифр. Докажите, что Даша загадала однозначное число.
Решение: Пусть Даша загадала число $\overline{a_N a_{N-1} .. a_1 a_0}$. Тогда из её утверждения

следует, что $\overline{a_N a_{N-1} .. a_1 a_0} \leq a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$. Но, так как все цифры меньше 10, то $a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0 < 10^N a_N$. Значит,

$$a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0 < 10^N a_N \leq \overline{a_N a_{N-1} .. a_1 a_0} \leq a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$$

Получаем противоречие: $a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0 < a_N \cdot a_{N-1} \cdot ... \cdot a_1 \cdot a_0$

Значит, такого быть не могло. Противоречия не возникает, только если мы не оценивали цифры в промежуточных выкладках, то есть если $n = 0$, что и значит, что число однозначное.

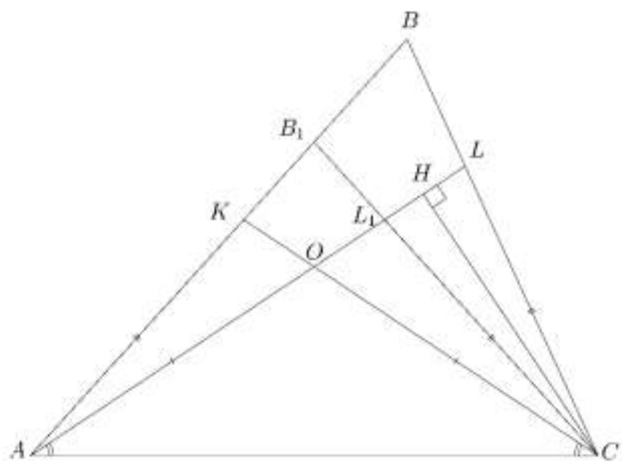
Критерии: Получено противоречивое неравенство, но не сделан вывод – 6 баллов.

Если рассматривались только двузначные и/или трехзначные числа - 2 балла.

7.5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O таким образом, что $\angle OAC = \angle OCA$. Кроме того, через точку O проведены прямые AO до пересечения с BC в точке L и CO до пересечения с AB в точке K. Оказалось, что $AK = CL$. Обязательно ли $AB = BC$?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение: Возьмём произвольный равнобедренный тупоугольный треугольник AOC ($AO = OC$) и опустим перпендикуляр из C на прямую AO. Он попадёт в точку H, причём O будет лежать между H и A, т.к. $\angle AOC$ – тупой. Пусть L_1 – произвольная точка между O и H. Построим точку K симметрично L_1 относительно срединного перпендикуляра к AC. $\angle L_1CA = \angle L_1CO + \angle OCA < \angle HCA < 90$, следовательно $\angle KAC + \angle L_1CA < 180$, а значит прямые AK и CL_1 пересекаются в точке B_1, лежащей по ту же сторону от AC. В силу симметрии очевидно, что треугольник ACB_1 равнобедренный.



Отразим L_1 относительно H в точку L. Теперь, если мы покажем, что прямые CL и AB_1 пересекаются в некоторой точке B с той же стороны прямой AC, то мы получим искомый неравнобедренный треугольник ABC, т.к. его углы при основании не могут быть равны из-за того, что ACB_1 равнобедренный.

Пусть $\angle OAC = a$, $\angle KAO = b$. Тогда $\angle HOC = 2a$. Из треугольника HOC выражаем $\angle HCO = 90 - 2a$, откуда $\angle LCH = \angle HCL_1 = 90 - 2a - b$. Тогда $\angle B_1AC + \angle LCA = \angle KAO + \angle OAC + \angle OCA + \angle L_1CO + 2\angle LCH = a + b + a + b + 180 - 4a - 2b = 180 - 2a < 180$, откуда и следует искомое.

Критерии: Не доказано, что AK и CL_1 пересекаются с нужной стороны от AC – не снимать баллов. Не объяснено, почему при таком построении треугольник ABC не может быть равнобедренным – снимать 1 балл. Не доказано, почему CL и AB_1 пересекаются с нужной стороны от AC – снимать 2 балла. Идея примера без доказательства того, что этот пример подходит – 2 балла.

Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Лада, Лера и Лара решали задачи. Оказалось, что Лада решила настолько же больше задач, чем Лера, насколько Лера решила больше, чем Лара. Могло ли оказаться, что они решили вместе 2015 задач?
Ответ: нет.
Решение: Пусть Лара решила x задач, а Лера решила x + a задач. Тогда Лада решила x + 2a задач, а все вместе девочки решили $3x + 3a = 2015$ задач. Однако, 2015 на три не делится, получаем противоречие.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.

8.2. Число уменьшили на 1%, затем остаток на 2%, затем остаток на 3% и так далее, пока в конце концов остаток не уменьшили на 30%. Другое число сначала уменьшили на 30%, затем остаток на 29% и так далее, пока остаток не уменьшили на 1%. Результаты оказались равны. Какое исходное число было больше?
Ответ: они были равны.
Решение: Если первое число было равно a, то итоговое число равно $0{,}99*0{,}98*\ldots*0{,}70*a$. Если второе число равно b, то итоговое число равно $0{,}70*0{,}71*\ldots*0{,}99*b$. Так как по условию $0{,}99*0{,}98*\ldots*0{,}70*a = 0{,}70*0{,}71*\ldots*0{,}99*b$, то $a = b$.
Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл.

8.3. В параллелограмме провели диагонали, а затем провели биссектрисы всех углов, образованных ими, до пересечения со сторонами параллелограмма. Эти точки назвали соответственно *A, B, C* и *D*. Докажите, что *ABCD* – ромб.
Решение: Отметим, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол, а биссектрисы вертикальных углов – образуют прямую. Таким образом, диагонали четырёхугольника *ABCD* перпендикулярны. Кроме этого, параллелограмм имеет центр симметрии – точку пересечения диагоналей *O*. При этой симметрии отрезки биссектрис *OA, OB* переходят соответственно в отрезки биссектрис *OC* и *OD*. Значит, диагонали четырёхугольника *ABCD* точкой пересечения делятся пополам, то есть *ABCD* – параллелограмм, и перпендикулярны, то есть *ABCD* – ромб.
Критерии: Не пояснено, почему диагонали *ABCD* перпендикулярны – снимать 3 балла. Не пояснено, почему диагонали *ABCD* точкой пересечения делятся пополам – снимать 3 балла.

8.4. Назовём *средним магическим* набора чисел отношение их суммы к их произведению. Изначально на доске записано несколько (больше одного) различных натуральных чисел. После того, как с неё стёрли самое маленькое из них, среднее магическое всех чисел, записанных на доске, увеличилось в три раза. Найдите, чему были равны числа на доске.

Ответ: 4 и 12; 4, 5, 7.

Решение 1: Пусть исходная сумма $s + a$, произведение ap, а самая маленькое число a. Тогда получим и упростим следующее соотношение:

$$3(s+a)/ap = s/p,$$
$$3s/a + 3 = s,$$
$$1/a + 1/s = 1/3,$$

С одной стороны, это выражение можно оценить так:

$$2/a > 1/a + 1/s = 1/3,$$
$$6 > a,$$

С другой стороны:

$$1/a < 1/3,$$
$$3 < a,$$

Если $a = 5$, то $s = 7{,}5$, не натуральное число.

Если $a = 4$, то $s = 12$.

Если всего чисел было два, то это 4 и 12.

Так как исходные числа различны, то их было не больше трёх (первое 4, второе не меньше 5, третье не меньше 6, следующее должно было бы быть не меньше 7, но тогда $s > 12$).

Если чисел три и второе больше 5, то есть хотя бы 6, то и третье больше 6, но тогда $s > 12$, значит, если чисел было три, то первое 4, второе – 5, оставшееся определяется однозначно.

Критерии: Только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Получено неравенство $6 > a$ – плюс 1 балл. Получено неравенство $3 < a$ – плюс 1 балл. Рассмотрен случай $a = 5$ – плюс 1 балл.

Решение 2: пусть на доске изначально записан набор $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где a_1- наименьшее число. Тогда $a_1 + \cdots + a_n = ka_1 \cdot \ldots \cdot a_n$, и $a_2 + \cdots + a_n = 3ka_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ для некоторого $k > 0$. Поделим первое равенство на второе и обозначим $N = a_2 + \cdots + a_n$. Получим $\frac{a_1+N}{N} = \frac{a_1}{3}$, или $a_1 = \frac{3N}{N-3}$.

НОД($3N$, N-3)=НОД(9,N-3) и равен N-3, так как $3N$ делится на N-3 нацело. Отсюда, так как НОД(9, N-3) = 1,3 или 9, получаем три варианта: N-3 = 1,3 или 9.

1)$N = 4$, следовательно, $a_1 = 12$. Но тогда сумма всех чисел $a_1 + N = 16$, а значит, a_1 не могло быть наименьшим числом на доске.

2)$N = 6$, следовательно, $a_1 = 6$. Аналогично получаем противоречие.

3)$N = 12$, следовательно, $a_1 = 4$. Тогда получаем, что сумма нескольких различных натуральных чисел, больших 4, равна 12. Получаем два варианта: либо $a_2 = 12$, либо $a_2 = 5, a_3 = 7$. Легко проверить, что оба эти варианта подходят.

Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл. Получено, что НОД(9, N-3) = 1,3 или 9 – плюс три балла. Разобраны оба случая 1) и 2) – плюс 1 балл.

8.5. У Даши есть 4 монеты, одна из которых фальшивая, отличная по весу от настоящих. Разрешается брать две группы монет и спрашивать у Даши, какая из них легче. Если такая есть, то Даша указывает на неё. Если же группы оказываются равны по весу, то Даша указывает на произвольную группу. Как за 3 вопроса выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета и найти её?

Решение: Пронумеруем монеты. Проведем три испытания: 1 и 2 против 3 и 4, 1 и 3 против 2 и 4, 1 и 4 против 2 и 3. Ясно, что каждый раз Даша будет показывать на легкую группу, потому что во взвешивании участвуют все монеты.

Без ограничения общности будем считать, что сначала группа 3 и 4 легче.

Если во второй раз правая группа снова легче, то либо 1 – тяжёлая, либо 4 – лёгкая. Иначе, либо 2 – тяжёлая, либо 3 – лёгкая.

В любом случае, третье испытание разрешает этот вопрос, потому что «подозрительные» монеты будут находится в одной группе.

Критерии: Верный алгоритм без доказательства того, что он работает – 3 балла. Верное решение без разбора одного случая – снять 2 балла. Если не разобрано несколько случаев – ставить не больше 3 баллов.

Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Петя выписал на доске 10 целых чисел (не обязательно различных). Потом он посчитал попарные произведения (то есть каждое из написанных чисел умножил на каждое другое). Среди них оказалось ровно 15 отрицательных. Сколько на доске было написано нулей?

Ответ: 2.

Решение. Пусть на доске A положительных чисел и B отрицательных. Тогда $A+B\le 10$ и $A\cdot B=15$. так как отрицательное произведение получается, когда мы перемножаем отрицательное и положительное число. Отсюда легко понять, что числа A и B – это числа 3 и 5 (1). Значит, $A+B=8$ и на доске ровно два нуля.

Критерии. Правильный ответ без обоснования – 1 балл. Верно найдено промежуточное соотношение (1) – 4 балла. Правильный ответ с обоснованием – 7 баллов.

9.2. В трапеции одна боковая сторона вдвое больше другой, а сумма углов при большем основании равна 120 градусов. Найти углы трапеции.

Ответ. 90 и 30 градусов.

Решение. Обозначим вершины трапеции за A,B,C,D, с большим основанием AD, считаем CD вдвое больше AB. Выберем на AD точку E такую, что BE параллелен (и равен) CD и обозначим за M середину отрезка BE. Тогда треугольник ABM равнобедренный с углом 60 градусов при вершине B, следовательно, равносторонний и точка M равноудалена от A,B и E. Значит, M — центр окружности, содержащей точки A,B и E, а BE — её диаметр. Угол BAE вписанный и опирается на этот диаметр, следовательно, его величина равна 90 градусов, тогда величина угла BAD тоже равна 90 градусов, а угла CDA - равна 30 градусов.

Критерии. Идея построения отрезка BE: 2 балла.

9.3. Натуральные числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $ab+bc+ac$ и $a+b+c$ - простое число. Доказать, что $a=b=c=1$.

Доказательство. Запишем $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$, из условия следует, что правая часть делится на $ab+bc+ac$, следовательно, и $(a+b+c)^2$ делится на $ab+bc+ac>1$. По условию число $(a+b+c)^2$ является квадратом простого числа, значит его делителями, отличными от 1 могут быть только $a+b+c$ и само $(a+b+c)^2$. В первом случае $a+b+c=ab+bc+ac\ge a+b+c$ и равенство возможно только при $a=b=c=1$. Во втором случае $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=ab+bc+ac$, откуда $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=0$, что невозможно при натуральных a,b,c .

Критерии. Идея того, что $(a+b+c)^2$ делится на $ab+bc+ac>1$: 2 балла. Доказательство первого случая: 3 балла. Рассмотрение второго случая: 2 балла.

9.4. N различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, записаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одного, делится на 3. Найти максимально возможное значение N.

Ответ. 664.

Решение. Рассмотрим остатки от деления чисел на 3. Делимость на 3 обозначает, что в каждой паре чисел, стоящих через одно, либо оба числа делятся на 3, либо одно имеет при делении на 3 имеет остаток 1, а другое 2. Из чисел от 1 до 1000 на 3 делятся 333, остаток 1 дают 334, остаток 2 дают 333.

1) Пусть N нечётно. Тогда остатки 1 и 2 не смогут чередоваться по всему кругу, следовательно, все числа на кругу будут делиться на 3 и будет их не больше 333.

2) Пусть N чётно. Числа разбиваются на два цикла равной длины N/2: стоящие на местах с чётными номерами и стоящие на местах с нечётными номерами. В каждом из них либо все числа делятся на 3, либо по очереди дают остатки 1 и 2.

Цикл с числами, делящимися на 3 имеет длину не больше 333. Цикл с чередующимися остатками имеет чётную длину, не превосходящую 666.

Если среди выписанных есть числа, делящиеся на 3, то есть цикл из таких чисел длины не больше 333. Второй цикл тогда должен был бы состоять из не превосходящего 333 чётного количества чисел, с остатками 1 и 2, то есть из не более, чем 332 чисел. Тогда всех чисел было бы не больше 664. Это количество достигается: один цикл содержит делящиеся на 3 числа от 3 до 996, второй: все числа от 1 до 498, не делящиеся на 3.

Если же чисел, делящихся на 3 нет, то длины циклов равны и чётны, поэтому всего должно быть выписано не превосходящее 667 и делящееся на 4 количество чисел, дающих остатки 1 и 2, то есть тоже не больше 664.

Критерии. Рассмотрение случая 1) N нечётно: 1 балл. Рассмотрения случая 2) N чётно- идея двух циклов: 1 балл, оценка длины каждого цикла: 1 и 2 балла соответственно. Построение примера: 2 балла.

9.5. На шахматную доску размера 8 на 8 произвольным образом уложены 8 фигурок домино, каждая из которых занимает две соседних по стороне клетки. Разные домино не имеют общих клеток. Доказать, что на доске всегда найдётся квадрат размера 2 на 2 клетки, ни одна клетка которого не закрыта домино. Верно ли это, если на доске уложены 9 домино?

Ответ. Для 9 домино это неверно.

Решение. На доске 8 на 8 квадрат размера 2 на 2 клетки можно выбрать 49 способами, а каждая фигурка домино имеет хотя бы одну общую клетку максимум с 6 квадратиками 2 на 2. Следовательно, 8 фигурок домино «закрывают» клетки максимум в 48 квадратиках 2 на 2, поэтому найдётся хотя бы один, ни одна клетка которого не закрыта домино.

Пример 9 домино, уложенных так, что в каждом квадрате 2 на 2 хотя бы одна клетка будет закрыта одним из домино: в шахматной записи домино лежат так (b2,b3),(d2,d3),(e4,e5),(e6,e7),(g6,g7),(b5,c5),(b7,c7),(f2,g2),(f4,g4).

Критерии. Доказательство для 8 домино: 5 баллов. Отрицательный пример для 9 домино: 2 балла.

Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Пусть неравенство $a\cos x + b\cos 2x \ge -1$ выполнено при всех значениях x. Докажите, что $a+b\le 2$.

Доказательство. Подставим в левую часть неравенства $x=\frac{2\pi}{3}$, тогда $\cos x=\cos 2x=-\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\ge -1$, откуда $a+b\le 2$.

10.2. Найти число различных расстановок 8 ладей на различных белых полях шахматной доски 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.

Ответ. $576=(4!)^2$.

Решение. Из того, что ни одна ладья не бьёт другую следует, что в каждой вертикали и в каждой горизонтали доски стоит ровно одна ладья. Заметим, что белые клетки вертикалей с нечётными номерами (первый тип) находятся в горизонталях с чётными номерами, а белые клетки вертикалей с чётными номерами (второй тип) находятся горизонталях с нечётными номерами, поэтому ладьи, стоящие на вертикалях с номерами разной чётности не могут бить друг друга. Следовательно, общее число искомых расстановок равно числу расстановок 4 ладей в клетках первого типа, равному 4!, умноженному на число расстановок 4 ладей в клетках второго типа, тоже равному 4!.

Критерии. Замечено, что ладьи, стоящие на вертикалях с номерами разной чётности не могут бить друг друга: 3 балла. Правильный подсчёт числа расстановок 4 ладей в клетках каждого типа: 2 балла. Их перемножение: 2 балла.

10.3. На доске написаны десять чисел (среди которых могут быть равные) таких, что среднее арифметическое любых трёх из этих чисел тоже написано на доске. Доказать, что все эти числа равны между собой.

Доказательство. Расположим числа в порядке возрастания: $a_1\le a_2\le\ldots\le a_{10}$. Предположим, что не все числа равны между собой, тогда $a_1<a_{10}$. Рассмотрим восемь средних арифметических $\frac{a_1+a_2+a_{10}}{3}\le\frac{a_1+a_3+a_{10}}{3}\le\ldots\le\frac{a_1+a_9+a_{10}}{3}$, среди них столько же различных, сколько среди чисел $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$, а из условия следует, что они содержатся среди $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$. Значит, они соответственно равны числам $a_2\le a_3\le\ldots\le a_9$, откуда сразу получаем, что $a_2=\ldots=a_9=\frac{a_1+a_{10}}{2}$, все числа, кроме крайних равны. Если $a_1<a_2$, то среднее арифметическое $a_1<\frac{a_1+a_2+a_3}{3}<a_2$ не может быть написано на доске — противоречие с условием. Аналогично в случае $a_9<a_{10}$. Следовательно, все эти числа равны между собой.

Критерии. Равенство между собой большей части чисел: 4 балла. Равенство всех: ещё 3 балла.

10.4. Две окружности внешним образом касаются друг друга в точке P. Прямая касается первой из них в точке A и пересекает вторую в точках B и C (B между A и C). Доказать, что AP является биссектрисой угла, смежного с углом BPC.

Доказательство. Продлим отрезок CP за вершину P до пересечения с первой окружностью в точке M и проведём через P общую касательную двух окружностей *l*. Угол MPA равен углу между касательной AB и хордой AM первой окружности, как вписанный угол, опирающийся на эту хорду. С другой стороны, как внешний угол треугольника MAC, он равен сумме углов AMP и ACP=BCP. В первой окружности угол AMP опирается на хорду AP, следовательно, равен углу между AP и общей касательной *l*, а во второй окружности угол BCP опирается на хорду BP и равен углу между BP и общей касательной *l*. Значит, сумма углов AMP и ACP=BCP, равная MPA, равна углу APB между хордами AP и PB, и AP является биссектрисой угла MPB, смежного с углом BPC.

Критерии. Угол MPA равен углу между касательной AB и хордой AM первой окружности: 1 балл. Угол MPA равен сумме углов AMP и ACP=BCP: ещё 2 балла. Угол AMP опирается на хорду AP, следовательно, равен углу между AP и общей касательной *l*, а во второй окружности угол BCP опирается на хорду BP и равен углу между BP и общей касательной l: ещё 2 балла. Сумма углов AMP и ACP=BCP, равная MPA, равна углу APB между хордами AP и PB, и AP является биссектрисой угла MPB: ещё 2 балла.

10.5. Можно ли найти четыре различных натуральных числа таких, что каждое из них делится на разность любых двух из трёх оставшихся чисел?

Ответ. Это невозможно**.**

Решение. Предположим, искомые четвёрки чисел существуют, выберем среди них четвёрку с наименьшей суммой. Сначала допустим, что одно из наших четырёх чисел нечётно. Среди трёх оставшихся выберем два одинаковой чётности, по условию, выбранное нечётное число должно делиться на их разность, являющуюся чётным числом, что невозможно. Следовательно, все эти числа чётны. Разделив каждое из них на 2, получим четвёрку, также удовлетворяющую условию задачи, но с вдвое меньшей суммой — противоречие с выбором начальной четвёрки.

Критерии. Рассмотрен случай, когда одно из наших четырёх чисел нечётно: 2 балла.

Всесибирская олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все ненулевые числа, в пять раз меньшие суммы всех своих цифр.
Ответ. 1,8 (одна целая восемь десятых).
Решение. Раз речь идёт о сумме всех цифр, то искомые числа записываются конечными десятичными дробями. Обозначим произвольное искомое число за x, а сумму его цифр за $S(x)$ тогда $S(x)=5x$ и $x=\frac{2S(x)}{10}$, значит x содержит не более одной цифры после запятой. Если $x=\overline{a.b,c}$ содержит не меньше двух цифр до запятой, то $x=\overline{a..b,c}\geq 10a+\ldots+c>a+\ldots+c=S(x)$ и равенство $S(x)=5x$ невозможно. Остался случай $x=\overline{a,b}=a+\frac{b}{10}$, тогда $10x=10a+b=2S(x)=2a+2b$, откуда $b=8a$, значит $a=1,b=8$.
Критерии. Замечено, что искомые числа записываются конечными десятичными дробями: 1 балл. Доказано, что x содержит не более одной цифры после запятой: 2 балла. Доказано, что x содержит не более одной цифры до запятой: 2 балла. Отыскание x в случае $x=\overline{a,b}=a+\frac{b}{10}$: 2 балла.
Только угадан верный ответ с проверкой: 1 балл.
11.2. Назовём четвертью шахматной доски каждый из 4 квадратов 4 на 4 клетки, на которые её разбивают линии сетки, соединяющие середины её горизонтальных сторон и середины её вертикальных сторон. Найти количество различных расстановок 8 ладей на шахматной доске 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую и в каждой четверти находится одинаковое число ладей. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.
Ответ. 12^4=20736.
Решение. По условию в каждой четверти стоят по 2 ладьи. Количество способов поставить в левой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух горизонталей и двух вертикалей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2\cdot C_4^2=72$. Если ладьи в левой нижней четверти уже поставлены, для ладей в правой нижней четверти остаются две свободные горизонтали, и количество способов поставить в правой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух вертикалей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2=12$. Аналогично, количество способов поставить в левой верхней четверти две не бьющих друг друга ладьи равно удвоенному числу способов выбора двух горизонталей, в которых они стоят из четырёх, то есть $2\cdot C_4^2=12$. Ладьи в правой верхней четверти могут стоять только в двух оставшихся свободными вертикалях и горизонталях, то есть двумя способами. По правилу умножения общее число способов расстановки равно произведению $72\cdot 12\cdot 12\cdot 2=12^4$.
Критерии. Найдено количество способов поставить в левой нижней четверти две не бьющих друг друга ладьи: 2 балла. Найдено количество способов поставить в правой нижней и левой верхней четверти две не бьющих друг

друга ладьи: 2 балла. Ладьи в правой верхней четверти могут стоять только в двух оставшихся свободными вертикалях и горизонталях, то есть двумя способами: 1 балл. . По правилу умножения общее число способов расстановки равно произведению 7 2 1 2 1 2 2 = 1 1 4: 1 балл.

11.3. Можно ли расставить в вершинах и на рёбрах правильной треугольной пирамиды десять последовательных натуральных чисел так, чтобы для каждого ребра сумма трёх чисел на ребре и в его концах была постоянной?

Ответ. Нельзя.

Решение. Допустим, требуемая в условии расстановка возможна. Обозначим сумму трёх чисел на каждом ребре и в его концах за S, сложив эти суммы по всем рёбрам, получим 6S – чётное число. С другой стороны, каждое число на ребре мы учли в сумме 6S по разу, а каждое число в вершине — по три раза. Следовательно, 6S равно сумме всех десяти чисел плюс удвоенной сумме всех чисел в вершинах. Однако сумма всех десяти последовательных чисел нечётна, поскольку включает пять чётных и пять нечётных чисел, и не может в сумме с удвоенной суммой чисел в вершинах давать чётное число 6S - противоречие.

Критерии. Замечено, что суммы по всем рёбрам равны чётному числу: 2 балла. Доказано, что 6S равно сумме всех десяти чисел плюс удвоенной сумме всех чисел в вершинах: 3 балла. Показано, что сумма всех десяти последовательных чисел нечётна: 2 балла.

11.4. Внутри окружности взята произвольная точка *M*, отличная от центра окружности. Для каждой хорды окружности, проходящей через *M* и отличной от диаметра, обозначим через C точку пересечения касательных к окружности, проведённых через концы этой хорды. Доказать, что геометрическое место точек C является прямой.

Доказательство. Рассмотрим произвольную хорду AB окружности, проходящую через точку M, обозначим точку пересечения касательных к окружности, проходящих через A и B за C, а центр окружности — за O. Докажем, что проекция E точки C на луч OM постоянна, это значит, что геометрическое место всех точек C лежит на прямой *m*, проходящей через E перпендикулярно OM. Действительно,

$OE = OC \cdot \sin OCE = \dfrac{OA}{\sin OCA} \sin OCE = OA \dfrac{\sin OCE}{\sin OCA}$. Из перпендикулярности CE и OM, OC и AB следует равенство углов OCE и OMA, а из перпендикулярности AC и OA, OC и AB, следует равенство углов OCA и OAM. Из теоремы синусов для треугольника OAM получаем

$OE = OA \dfrac{\sin OCE}{\sin OCA} = OA \dfrac{\sin OMA}{\sin OAM} = OA \dfrac{OA}{OM} = \dfrac{OA^2}{OM} = \dfrac{R^2}{OM}$ - постоянной величине.

С другой стороны, рассмотрим на прямой *m* произвольную точку C. Проведём через M хорду AB так, чтобы угол OMA равнялся углу OCE и A располагалась с той же стороны от прямой OE, что и C. По доказанному касательные к окружности в точках A и B пересекутся в точке C_1 на прямой *m* такой, что угол OC_1E равен углу OMA, то есть совпадает с углом OCE. Отсюда следует, что точки C и C_1 тоже совпадают и геометрическим местом точек C является вся прямая *m*.

Критерии. Равенство углов OCE и OMA, и равенство углов OCA и OAM: по 1 баллу. Из теоремы синусов для треугольника OAM получаем что проекция E точки C на луч OM постоянна: 3 балла. Доказано, что геометрическим местом точек C является вся прямая m: 2 балла.

11.5. На дипломатическом приёме присутствуют 99 персон, каждый из которых слышал не менее, чем об n других участниках приёма. При этом если А слышал о Б, это не означает автоматически, что и Б слышал про А. При каком минимальном n гарантированно найдутся два участника приёма, слышавших друг о друге?

Ответ. При $n = 50$.

Решение. Назовём ситуацию когда один из гостей слышал о другом *полузнакомством*. Если каждый гость слышал не менее, чем о 50 других участниках приёма, то всего имеется не менее $99 \cdot 50$ полузнакомств, что больше общего число пар гостей на приёме, равного $\frac{99 \cdot 98}{2} = 99 \cdot 49$.

Следовательно, в какой - то паре есть не меньше двух полузнакомств, и гости из этой пары слышали друг о друге.

Приведём пример, когда каждый слышал ровно о 49 других гостях, но нет двух гостей, слышавших друг о друге. Расположив гостей по кругу, считаем, что каждый слышал только о следующих за ним по часовой стрелке 49 гостях. В таком случае о каждом слышали только 49 гостей, расположенных перед ним по часовой стрелке. Эти два множества не пересекаются, поэтому для каждого гостя нет другого гостя, о котором бы слышал он и который бы слышал о нём самом.

Критерии. Доказательство, что n не больше 50: 4 балла. Пример того, что n не меньше 50: 3 балла.