

Решения задач

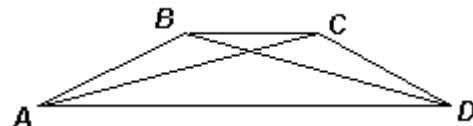
1.1. Вычислите: $\sqrt{1008^2 + 2017}$.

Ответ: 1009

Решение: $\sqrt{1008^2 + 2017} = \sqrt{1008^2 + 2 \cdot 1008 + 1} = \sqrt{(1008 + 1)^2} = 1009$.

1.2. Начертите четырёхугольник, такой, что любая диагональ этого четырёхугольника делит его на два тупоугольных треугольника.

Решение: например, такой (см. рисунок). В каждом из треугольников разбиения тупыми являются углы при вершинах B и C .



1.3. Можно ли таблицу 10×10 заполнить двойками и тройками так, чтобы сумма чисел в каждом ряду (строчке или столбце) были различны?

Ответ: нет, нельзя.

Решение: Подсчитаем наибольшую и наименьшую сумму чисел в ряду – 20 и 30, соответственно. Таким образом, в рядах может получиться одно из 11 чисел от 20 до 30. Рядов 20 (10 строк и 10 столбцов). Рядов больше чем вариантов, значит будет хотя бы одно совпадение сумм.

2.1. Известно, что $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$. Докажите, что $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{xy}$.

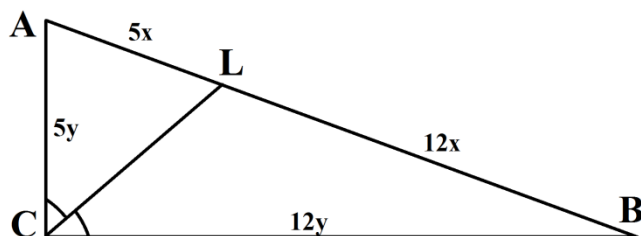
Решение. Преобразуем левую часть доказываемого равенства: $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{x+y} \cdot \frac{y+x}{xy} = \frac{1}{xy}$, что и требовалось доказать.

Замечание: не требуем пояснений, что какие-то выражения не равны 0, и мы можем делить (сокращать).

2.2. Биссектриса прямого угла треугольника ABC разбила его на два треугольника, площади которых отличаются в 2,4 раза. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что его периметр равен 90.

Ответ: 270.

Решение. Пусть C – вершина прямого угла, а точка L – основание биссектрисы из угла C . Тогда у треугольников ALC и BLC площади относятся также как и основания AL и BL соответственно (высоты из вершин C совпадают). Таким образом, $BL : AL = 2,4$. По свойству биссектрисы в треугольнике ABC $BC : AC = BL : AL = 2,4$. Обозначим $AC = 5y$, тогда $BC = 12y$. По теореме Пифагора найдем $AB = 13y$. Таким образом, периметр треугольника ABC можно найти как $12y + 13y + 5y = 30y$. Теперь легко находим, что $y = 3$. А площадь прямоугольного треугольника $ABC = AC \cdot BC : 2 = 12y \cdot 5y : 2 = 36 \cdot 15 : 2 = 270$.



2.3. 33 гуманоида выстроились в ряд, у каждого гуманоида в руках по кактусу. Одновременно каждый гуманоид обменивается кактусом с гуманоидом, который стоит от него через одного. Может ли оказаться так, что у каждого гуманоида в руках может оказаться по одному кактусу?

Ответ: не может.

Решение: Предположим, что гуманоиды смогут обмениваться кактусами указанным образом. Пронумеруем стоящих гуманоидов слева направо. Для того, чтобы у первого гуманоида оказался кактус, он должен поменяться кактусом с третьим гуманоидом. Тогда у пятого гуманоида останется кактус, только тогда, когда он поменяется кактусами с седьмым гуманоидом, девятый должен поменяться с одиннадцатым, тринадцатый с пятнадцатым, и так далее. Таким образом, все гуманоиды, стоящие на нечетных местах, должны разбиться на пары. Но это невозможно, так как на нечетных местах – 17 гуманоидов.

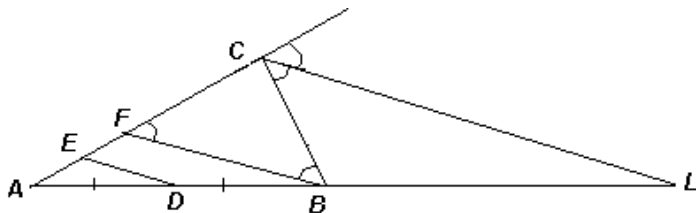
3.1. В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1 = 7$ расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство

Ответ: например, так: $10 : 9 : (8 : 7 : (6 : (5 : 4 : (3 : 2 : 1)))) = 7$

3.2. Угол BCK – внешний для треугольника ABC . Через середину D стороны AB треугольника провели прямую, параллельную биссектрисе угла BCK , которая пересекает сторону AC в точке E . Найдите AE , если $AC = 16$, $BC = 10$.

Ответ: 3.

Решение: Через вершину B проведем прямую, параллельную CL , F – точка ее пересечения с прямой AC . Тогда треугольник BCF – равнобедренный. Действительно, по свойствам параллельных прямых $\angle CFB = \angle KCL = \angle BCL = \angle CBF$, значит, $CF = CB$. Так как $AC > BC$, то F лежит на отрезке AC . Кроме того, так как $DE \parallel BF$ и D – середина AB , то $AE = EF$ (по теореме Фалеса). Таким образом, $\frac{AC - CF}{2} = \frac{AC - BC}{2} = 3$.



3.3. Каким наименьшим количеством цветов можно покрасить все числа от 1 до 2017 так, чтобы сумма и разность любых двух чисел одного цвета не делилась на 5?

Ответ: 807 цветов.

Решение: Рассмотрим числа оканчивающиеся на 1, 4, 6 и 9. Никакие два из них не могут быть одного цвета, а значит, понадобится не менее $201 \cdot 4 + 3 = 807$ цветов. Аналогично, с числами оканчивающиеся на 2, 3, 7 и 8. Для них понадобится так же $201 \cdot 4 + 3 = 807$ цветов. Для чисел оканчивающихся на 5 и 0 понадобится 403 цвета. Пример покраски в 807 цветов. Для каждого цвета берем по одному числу из 1й группы (оканчивающиеся на 1, 4, 6 и 9), из 2й группы (оканчивающиеся на 2, 3, 7 и 8), и по одному числу из 3й группы (оканчивающихся на 5 и 0), если они остались.