Ответы на задания школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике

2019-2020 учебный год

Класс 11

Максимальный балл - 35

(7 баллов за каждое задание)

1. Ответ: 15840

Решение. Пятизначных четных чисел 45000, так как на первом месте может стоять любая из 9 цифр (кроме 0), на втором, третьем и четвертом – любые цифры, а на пятом – любая из пяти четных цифр. Пятизначных четных чисел без троек $8\cdot 9^3\cdot 5= 29160$, $45000 - 29160 = 15840$.

2.Ответ. $x \in \left(-\infty;-\sqrt{5}+1\right] \cup \{0\} \cup \{2\} \cup \left[1+\sqrt{5};+\infty\right)$

Указание. Обозначим u = $\sqrt{x^2-2x}$. Имеем: $x^2-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$ или $x \geq 2$. Для функции f(f(x)) = f(u) область определения должна удовлетворять совокупности неравенств $u\leq 0$ или $u\geq 2$, т.е. $\sqrt{x^2-2x} \leq 0$ или $\sqrt{x^2-2x} \geq 2$. Первое из этих неравенств может выполняться лишь в случае нулевого подкоренного выражения, т.е. при x = 0 или x = 2. Решим второе неравенство: $\sqrt{x^2-2x} \geq 2$, $x^2-2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 1-\sqrt{5}$ или $x \geq 1+\sqrt{5}$.

3. Ответ: 5 учеников.

Решение. Пусть в классе n учеников, их средний возраст – p лет, а возраст учителя – m лет. Тогда, по условию, $m = p + 24$ и $m = \frac{pn+m}{n+1} + 20$. Упрощая второе уравнение, получим: $m(n+1) = pn + m + 20(n+1) \Leftrightarrow n(m-p) = 20(n+1)$

Из первого уравнения следует, что $m - p = 24$, тогда $24n = 20n + 20$, т. е. $n = 5$

4.Доказательство. Найдем производную функции $f(a) = 2a + \frac{1}{a^2}$: $f'(a) = 2 - \frac{2}{a^3} < 0$ при $a \in (0;1)$. Значит, $f(a)$ убывает на (0;1), а поэтому f(0) > f(1), где f(1) = 3. Следовательно, $2a+\frac{1}{a^2}>3$ при $0 < a <1$.

5. Ответ: $9\sqrt{3}$ см².

Решение. Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то в четырехугольнике ABCD AD = DC (см. рис.). Рассмотрим поворот с центром D на угол ADC по часовой стрелке. При таком повороте: образами точек A и B являются точки C и B’ соответственно, то есть, образом треугольника ABD является равный ему треугольник CB'D. Так как четырехугольник ABCD – вписанный, то $\angle BCD + \angle BAD = 180°$, значит точки B, C и B′ лежат на одной прямой. Таким образом, четырехугольник ABCD и треугольник BDB′ – равновелики.

Так как в треугольнике BDB′: DB′ = DB = 6 см;

$\angle B' = \angle B = 30°$, то $S_{ABCД} = S_{ВДВ'}$ =

$\frac{1}{2} BD \cdot B'D \cdot \sin 120° = 9\sqrt{3}$